

Marc Saint-Paul

Juillet - août 2015

Le 22 août pour la présente version¹ revue le 24 septembre 2015.

Des compositions et triskels

Étude topologique d'accompagnement du texte "Topologie et schématisation RL pour la psychanalyse".

Introduction

Cette étude de topologie naïve constitue un accompagnement de mon texte consacré à la topologie pour le schématisation RL², qui fait suite à ma note³ de préparation aux journées de Sainte-Marie-aux-Mines de juillet 2015.

Le nœud 9-40 étudié dans cette note peut être considéré comme une extension de la chaîne borroméenne, selon un procédé itérable : le nœud borroméen peut être lui-même construit à partir de l'un des nœuds trèfles (soit donc d'un triskel), ces trèfles étant eux-mêmes constructibles à partir du nœud trivial, le rond. Le procédé se généralise à une famille de présentations de nœuds et chaînes construites ainsi par adjonction itérative de triskels sur la base triviale du rond puis sur l'un des deux trèfles. Cette famille se compose de deux sous-familles dont les membres de rang impair (trèfles, 9-40s, chaînes brunniennes à 15 croisements, ...) sont chiraux, de chiralité gauche ou droite, et les membres de rang pair (rond, chaîne borroméenne, ...) sont amphichiraux et communs aux deux sous-familles.

Je propose ici l'étude de cette famille **triskels_{n,G}** avec son processus de construction et diverses opérations de (dé)composition, notamment des opérations additives et soustractives qui ont pour cas particulier le mouvement nœud connu pour faire et défaire les nœuds et chaînes.

L'opération soustractive compose deux présentations de nœuds ou chaînes dont les gyries de composition sont opposées, et produit un nœud ou une chaîne résultant triviale ou de gyrie identique à la gyrie du nœud ou de la chaîne entrant dans la composition de rang le plus élevé. Une opération de "toricisation" des nœuds et chaînes de rang pair de cette famille est finalement exposée, qui conduit à des chaînes justifiant naturellement, pour leurs présentations, des mises à plat toriques, selon la théorie des nœuds virtuels (Kauffman) donc.

¹ Cette version est susceptible de contenir coquilles ou conques dont l'auteur, occasionnel collectionneur, allègera volontiers son menu s'il en est informé, quelles soient dextro ou lévogyres.

² Marc Saint-Paul, "Topologie et schématisation RL pour la psychanalyse", été 2015.

³ Marc Saint-Paul, ""Nœud-nu-phare" ou Rolfsen 9-40 pour le schéma RL", 7 juillet 2015.

Cette étude, rédigée en mathématicien profane, rassemble diverses définitions et propriétés avec leurs illustrations visant à exposer suffisamment précisément mon propos pour des non mathématiciens.

Elle pourra paraître à certains psychanalystes rébarbativement technique voire inutilement algébrique. Tout comme le solfège et les partitions, inutiles pour qui entend la musique et a l'oreille musicale, cette annexe peut encore, pour qui est familier avec la topologie et la pratique spontanément, s'avérer superflue.

Mais Lacan lui-même n'a pas rechigné à se rompre *a minima* aux gammes de la topologie des nœuds (*cf.* ses nombreux échanges avec les topologues), apprenant à les lire et écrire finement, et s'appuyant sur elles pour parfois se départir d'intuitions topologiques trompeuses. La clarification de ces rudiments de topologie aura constitué pour son auteur un temps nécessaire pour avancer dans le questionnement du texte "Topologie et schématisation RL pour la psychanalyse".

Sommaire

Introduction	1
Sommaire	2
1 La famille triskels _n	3
1.1 Résumé de la construction et des premières compositions	3
1.1.1 La construction de la famille triskels _n	3
1.1.2 La composition de présentations emboîtées \oplus_{x3}	5
1.1.3 La composition de présentations en vis-à-vis $\#_{x3}$	5
1.2 Remarques préliminaires sur la chiralité des nœuds et sur la gyrie des présentations	6
1.2.1 Les nœuds chiraux	7
1.2.2 Les gyries des présentations de la chaîne borroméenne	7
1.3 Les premiers membres de la famille triskels _{n,Gi(Ge)}	8
1.3.1 Le rond ou triskels _{0,-,-}	8
1.3.2 Le nœud trèfle ou triskels _{1,Gi,Ge=Gi}	9
1.3.3 La chaîne borroméenne ou triskels _{2,Gi(Ge = -Gi)}	9
1.3.4 Le nœud 9-40 ou triskels _{3,Gi(Ge = Gi)} ou borrorond	10
1.3.5 Le triskels _{4,Gi(Ge = -Gi)} ou borrotèfle	11
1.3.6 Le triskels _{5,Gi(Ge = Gi)}	11
1.4 Généralisation de la construction – le nœud ou la chaîne triskels _{n,Gi(Ge)}	11
1.5 L'opération de composition de présentations emboîtées \oplus_{x3}	12
1.6 L'opération de composition de présentations en vis-à-vis $\#_{x3}$	13
1.6.1 Le nœud trèfle ou triskels _{1,G,G}	13
1.6.2 La chaîne borroméenne ou triskels _{2,Gi(Ge = -Gi)}	14
1.6.3 Le 9-40 ou triskels _{3,Gi,Ge}	14
1.6.4 La chaîne brunnienne triskels _{5,G,G}	15
1.7 Généralisation du nombre de croisements d'interaction à <i>c</i> croisements entrant dans la composition $\#_{x3}$	15
1.7.1 Le cas <i>c</i> = 1	15
1.7.2 Le cas <i>c</i> = 2	16
1.7.2.1 La chaîne de Whitehead	16
1.7.2.2 La chaîne de huit intriqués	16
1.8 Extension du procédé pour produire des enlacements	17
1.9 Structure graphique de la famille triskels _{n,Gi(Ge)}	17
1.9.1 Une figuration géométrique de la famille triskels _{n,Gi(Ge)}	18
1.9.2 Une autre figuration 'mandala' des présentations triskels _{n,Gi(Ge)}	18

1.9.3	Une famille de graphes associés à la famille $\text{triskels}_{n,Gi,(Ge)}$	20
1.9.4	D'une construction linéaire à une construction à rebouclage torique.....	23
2	Les présentations 3d des $\text{triskels}_{n,Gg,(Gd)}$	23
2.1	la présentation 3d	23
2.2	L'opération de composition $\#_{x3}$ des présentations 3d.....	24
2.3	La composition additive directe $+_{=3}$ des présentations 3d.....	25
2.3.1	Relation entre les compositions $\#_{x3}$ et $+_{=3}$	27
2.3.2	Tables pour la composition additive $+_{=3}$	27
2.4	La composition soustractive $-_{=3}$ des présentations 3d	28
2.4.1	Tables pour la composition soustractive $-_{=3}$	28
2.4.2	trivialisation et changement de gyrie par composition soustractive, nœuds et chaînes inverses.....	29
2.5	Miscellanées	30
2.5.1	Propriétés algébriques de $+_{=3}$ et $-_{=3}$	30
2.5.2	Généralisations des opérations $+_{=3}$ et $-_{=3}$	30
3	Un rebouclage torique des composés $\text{triskels}3d_{2n,Gg,Gd=1-Gg}$	30
3.1	Un exemple : le rebouclage torique du borrotrefle.....	30
3.2	Surface de mise à plat torique et croisements virtuels	31
3.3	L'opérateur de rebouclage torique	33
4	Un codage littéral de la famille $\text{triskels}_{n,Gi,Ge}$	34
	Conclusion.....	36

1 La famille triskels_n

1.1 Résumé de la construction et des premières compositions

1.1.1 La construction de la famille triskels_n

Voici donc un résumé de ce qui sera exposé pas à pas par la suite, à savoir, et pour commencer, un 1^{er} procédé de construction des membres de cette (double) famille de présentations de nœuds et chaînes **triskels** $_{n,Gi,(Ge)}$ (également noté $\mathbf{t}_{n,Gg,(Gd)}$) par itération à partir du rond (mais on peut aussi considérer que cette itération se base sur l'un des trèfles - gauche ou droit).

En construisant cette (double) famille de présentations, c'est donc une (double) famille de nœuds et chaînes qui nous construisons.

L'indice Gi indique la gyrie, observée d'un point de vue interne, du triskel interne de la présentation **triskels** $_{n,Gi,(Ge)}$. C'est encore la gyrie du triskel interne du trèfle de base de cette (sous-)famille.

L'indice Ge est la gyrie, observée du point de vue externe, à l'infini, du triskel externe de la présentation.

L'indice n correspond au nombre d'étapes nécessaires à la construction de cette présentation du nœud. Il déterminera le nombre de croisements de la présentation **triskels** $_{n,Gi,(Ge)}$.

La relation entre les gyries Gi et Ge est une fonction de n .

Lorsque n est impair comme dans le cas d'un trèfle, Gi et Ge sont identiques : $Gi = Ge = D(\text{extro})$ si le trèfle est *left-handed* (gaucher ou 'fileté à gauche', cf. *infra*), $Gi = Ge = L(\text{évo})$ si le trèfle est *right-handed* (droitier ou 'fileté à droite').

Lorsque n est pair comme dans le cas d'une présentation de borroméen, G_i et G_e sont opposés : si G_i est dextro, alors G_e est lévogyre.

Si à D est assignée la valeur 1 et à L la valeur -1, la relation entre G_e et G_i peut encore s'écrire :

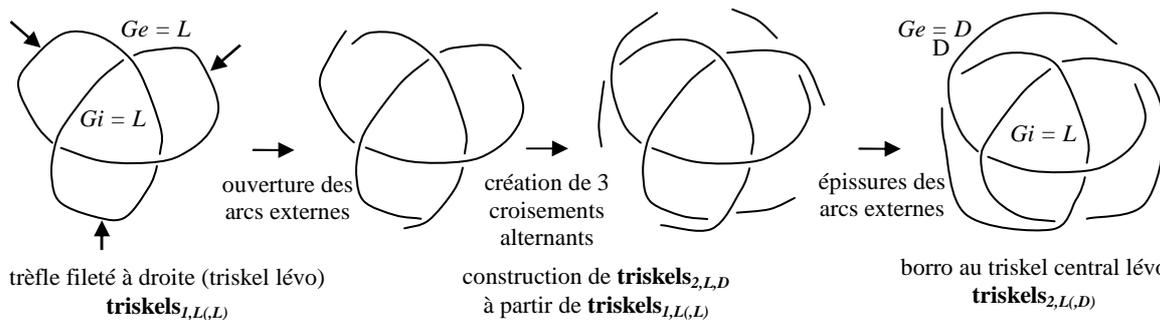
$$G_e = (-1)^{(n+1)} G_i$$

L'information G_e est donc redondante si l'on dispose déjà de n et G_i . Nous la mentionnons donc de manière optionnelle entre parenthèses. Elle sera cependant pratique pour présenter les deux formes de l'opération de composition, \oplus_{x3} et $\#_{x3}$, de manière similaire.

Le rond, 1^{er} membre de la famille (cas $n = 0$) n'a pas de gyrie mais, pour des besoins de généralisation et par abus de langage, pourra être considéré comme ayant les deux gyries. Il sera noté **triskels**_{0,-,-}.

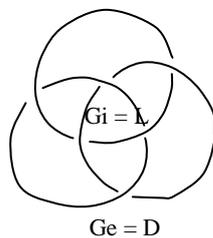
À l'étape n de construction, la présentation du dernier nœud précédemment construit, $n^{\text{ième}}$ membre de la famille, est rouverte au niveau de ses arcs externes, 3 croisements alternants sont créés, puis des rabouages réalisés, formant ainsi le $(n+1)^{\text{ième}}$ membre de la famille.

Voici un exemple de cette étape de construction qui permet de passer du 2^{ième} au 3^{ième} membre de la famille **triskels** _{$n,G_i(G_e)$} .

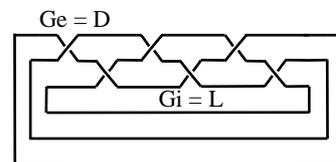


Les présentations de nœuds et chaînes utilisées dans cette construction sont les présentations en tresses minimales (= à nombre minimal de croisement) et alternées (tous les membres de cette famille **triskels** _{n} sont alternés).

On utilise principalement deux figurations de ces présentations en tresses : une figuration que je nomme "en tresse circulaire" où la tresse est déployée circulairement et reste invariante par rotation de 120°, et une figuration "en tresse rectangulaire" où tous les croisements de la tresse sont situés d'un même côté.



Figuration en tresse circulaire



Figuration en tresse rectangulaire

Présentation lévogyre ($G_i = L$, $G_e = D$)
minimale alternée de la chaîne borroméenne

Ce 1^{er} procédé de construction - par (1) ouverture des arcs externes, (2) création de croisements alternants et (3) épissures - peut être également vu comme une **composition** du $n^{\text{ième}}$ membre de la famille **triskels** _{$n,G_i(G_e)$} avec un **rond** (= **triskels**_{0,-,-}) via l'introduction de trois croisements respectant l'alternance des croisements.

Je définis donc ensuite une opération de composition sur les mêmes présentations en tresses minimales alternées des membres de la famille. Une telle composition entre deux présentations $\mathbf{triskels}_{p,Gi,(Ge)}$ et $\mathbf{triskels}_{q,Gi',(Ge')}$ ne sera possible que si une condition portant sur les gyries des présentations est respectée.

En pratique ce sont deux variantes de la même opération de composition qu'il est naturel de distinguer : la composition "emboîtée" \oplus_{x3} et la composition "en vis-à-vis" $\#_{x3}$.

1.1.2 La composition de présentations emboîtées \oplus_{x3}

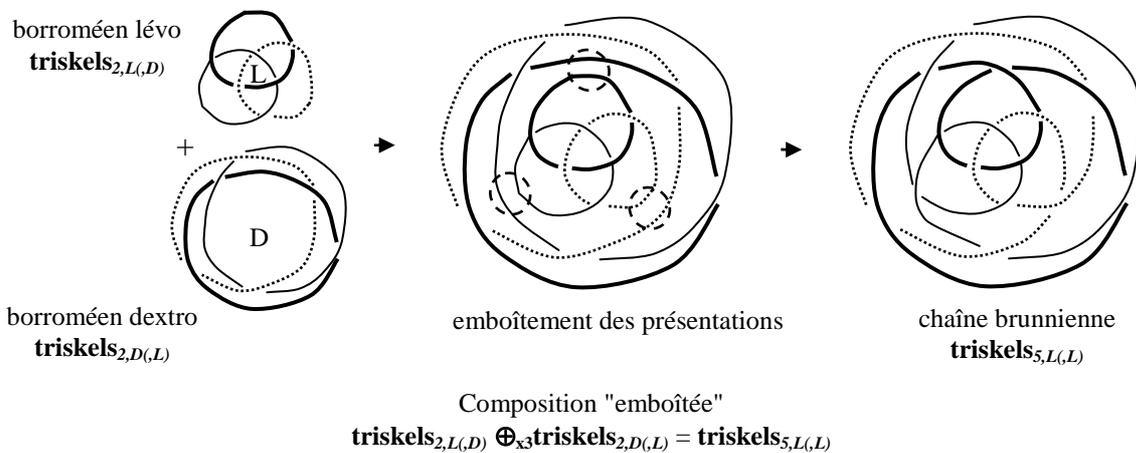
La composition emboîtée \oplus_{x3} (ex : $\mathbf{triskels}_{p,Gi,(Ge)} \oplus_{x3} \mathbf{triskels}_{q,Gi',(Ge')}$) relie les arcs externes de la 1^{ère} présentation entrant dans la composition, $\mathbf{triskels}_{p,Gi,(Ge)}$, aux arcs internes de la 2^{nde} présentation $\mathbf{triskels}_{q,Gi',(Ge')}$. Les deux présentations en interaction s'emboîtent donc, s'enchâssent ou s'imbriquent.

La condition pour que la composition emboîtée soit possible est que la gynie externe Ge de la 1^{ère} présentation soit identique à la gynie interne Gi' de la 2^{nde} présentation :

$$\text{condition pour la composition } \oplus_{x3} : Ge = Gi'$$

Dans nos schémas illustrant cette composition nous utiliserons les figurations circulaires des présentations (mais les figurations rectangulaires sont également utilisables).

Voici un exemple de composition emboîtée \oplus_{x3} qui compose deux présentations de borroméens, la 1^{ère} lévo ($Ge = D$) et la 2^{nde} dextro ($Gi' = D$), pour construire une chaîne brunnienne $\mathbf{triskels}_{5,L,(L)}$.



1.1.3 La composition de présentations en vis-à-vis $\#_{x3}$

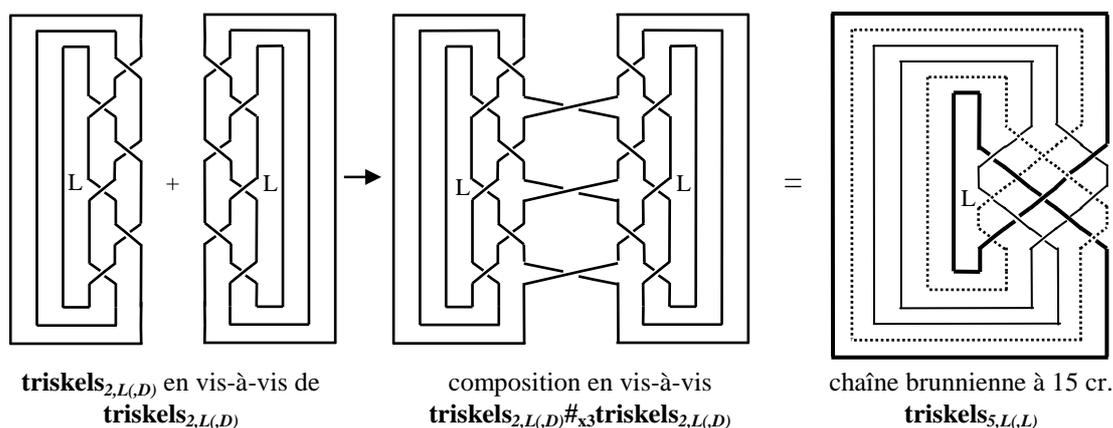
La composition en vis-à-vis $\#_{x3}$ (ex : $\mathbf{triskels}_{p,Gi,(Ge)} \#_{x3} \mathbf{triskels}_{q,Gi',(Ge')}$) relie les arcs externes de la 1^{ère} présentation entrant dans la composition, $\mathbf{triskels}_{p,Gi,(Ge)}$, aux arcs externes de la 2^{nde} présentation $\mathbf{triskels}_{q,Gi',(Ge')}$. Ici les deux présentations en interaction se font face.

La condition pour que la composition en vis-à-vis soit possible est que la gynie externe Ge de la 1^{ère} présentation soit identique à la gynie externe Ge' de la 2^{nde} présentation :

condition pour la composition $\#_{x3} : Ge = Ge'$

Avec ce type de composition on aura recours aux figurations "rectangulaires" des présentations en tresses minimales alternées.

Voici l'exemple de composition en vis-à-vis $\#_{x3}$ composant deux présentations de borroméens, la 1^{ère} lévo ($Ge = D$) et la 2nd lévo également⁴ ($Ge' = D$), pour construire la chaîne brunnienne **triskels**_{5,L(L)}.



Ces deux opérations de composition \oplus_{x3} et $\#_{x3}$ sont de fait équivalentes si l'on raisonne en termes de nœuds et chaînes⁵, mais la mise en lumière de cette équivalence permet de se familiariser avec ces renversements de points de vue en permanence à l'œuvre dans les opérations psychiques que cherche à étudier ce texte.

Dans ce qui suit ces constructions et compositions sont détaillées et plus largement illustrées, après quelques rappels cependant sur les propriétés de chiralité des nœuds et de gyrie des triskels de présentation.

Notation : dans la suite je noterai \approx la relation d'équivalence entre présentations de la théorie classique des nœuds : deux présentations p_1 et p_2 de nœuds ou chaînes sont équivalentes, notation $p_1 \approx p_2$, si elles font partie de la même classe d'équivalence de présentations (ou diagrammes de nœuds) selon les mouvements de Reidemeister. Le nœud ou la chaîne qu'elles représentent est cette classe d'équivalence.

1.2 Remarques préliminaires sur la chiralité des nœuds et sur la gyrie des présentations

Un nœud est dit *chiral* s'il n'est pas équivalent à son image miroir. Dans le cas contraire on le dit *achiral* ou encore *amphichiral*.

⁴ On note la différence avec l'exemple donné plus haut pour la composition emboîtée.

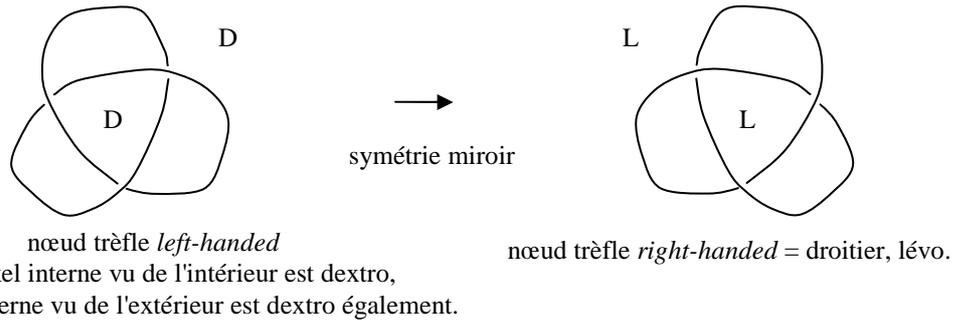
⁵ puisque par exemple une présentation lévo d'un borroméen peut-être transformée par dualités successives en une présentation dextro du même borroméen, et le principe de cet exemple peut être généralisé. On peut donc changer la présentation entrant dans la nouvelle composition ($\#_{x3}$ au lieu de \oplus_{x3}) sans changer le nœud y entrant.

1.2.1 Les nœuds chiraux

Le trèfle et le 9-40, nœuds chiraux, existent en deux versions distinctes : une version *left-handed*^{6 7} (gauchère ou fileté à gauche) et une version *right-handed* (en filetage à droite).

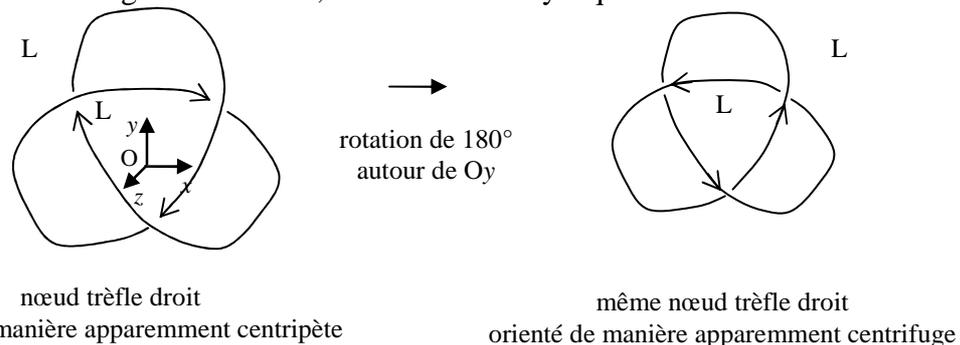
La présentation lévogyre **triskels**_{I,L(L)} est une présentation du trèfle droitier (!), tandis que le dextrogyre **triskels**_{I,D(D)} représente un trèfle gaucher.

Le trèfle fileté à gauche est **triskels**_{I,D(D)} : il est organisé autour d'une triskel interne dextrogyre.



Vu de l'extérieur, le triskel constitué des arcs externes du trèfle est de même gyrie que le triskel interne de cette présentation.

Il n'y a qu'un seul trèfle gauche **orienté**, tout comme il n'y a qu'un seul trèfle droit orienté.



On note que la famille **triskels**_{n,Gi(Ge)} ne contient pas de présentation **triskels**_{I,L(D)} ou **triskels**_{I,D(L)} : de telles présentations ne sont pas constructibles avec l'algorithme de construction décrit. Dit autrement : la relation $Ge = (-1)^{(n+1)} Gi$ établie plus haut et liant Gi à Ge rend impossible de tels triplets de paramétrisation.

1.2.2 Les gyries des présentations de la chaîne borroméenne

La chaîne borroméenne est amphichirale, car équivalente à son image miroir. Elle admet deux présentations membres de la famille **triskels**_{n,Gi(Ge)} aux gyries internes opposées.

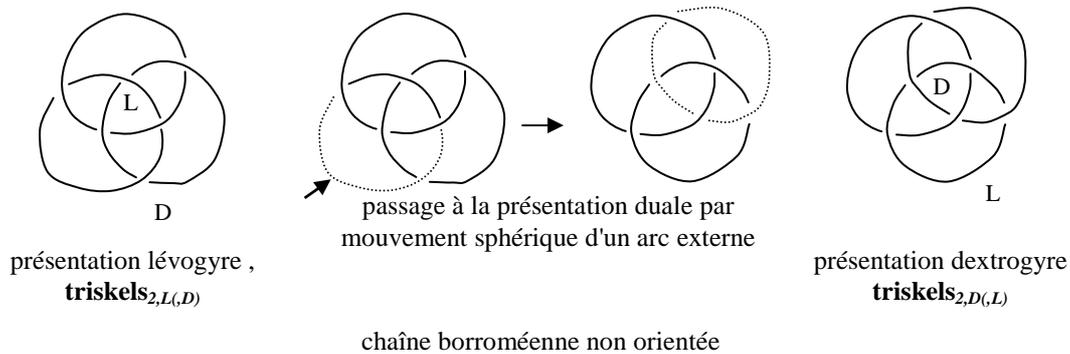
⁶ source : https://en.wikipedia.org/wiki/Chiral_knot. La chiralité (*handedness*) d'un nœud chiral peut prendre deux valeurs : *left-handed* (que je traduis par gaucher ou fileté à gauche), et son opposé *right-handed*.

⁷ https://en.wikipedia.org/wiki/Right-hand_rule

L'une, **triskels_{2,L(D)}**, est communément appelée lévogyre car son triskel central est lévo, mais elle peut également être caractérisée par le triskel composé de ses arcs externes : son triskel "externe", vu du point de vu extérieur, qui est dextrogyre.

L'autre, **triskels_{2,D(L)}**, est appelée dextrogyre car son triskel central est dextro, soit encore son triskel externe est lévogyre.

On passe d'une présentation à l'autre par exemple au moyen d'un mouvement sphérique sur un arc externe.



On note encore que même après orientation des ronds de la chaîne borroméenne, il n'y a qu'une seule chaîne borroméenne⁸. C'est un résultat que Pierre Soury et Michel Thomé avaient produit pour Jacques Lacan, et que ce dernier présente et discute dans la séance du 8 avril 1974 du séminaire *R.S.I.*.

1.3 Les premiers membres de la famille **triskels_{n,Gi(Ge)}**

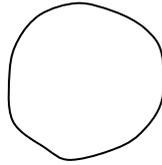
1.3.1 Le rond ou **triskels_{0,-,-}**

La base du procédé, premier membre de la famille des **triskels_{n,Gi(Ge)}** : **triskels_{0,-,-}**, est le nœud trivial, c'est-à-dire le rond.

⁸ Ainsi l'on peut produire pour la chaîne borroméenne des présentations correspondant à tous les cas d'orientation des trois ronds et de gyrie au moyen de séquences de rotations de 180° et de mouvements sphériques d'un arc externe.

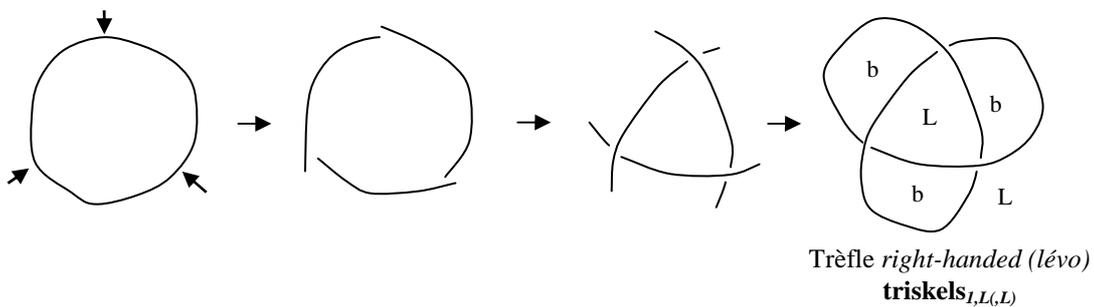
Par exemple, si H signifie "orientation horaire du rond" et AH signifie "orientation antihoraire du rond" et si (o_1, o_2, o_3, g) est un quadruplet caractérisant une présentation d'un borroméen dont le rond 1 est orienté selon o_1 , le rond 2 selon o_2 , le rond 3 selon o_3 , et la gyrie du triskel central selon g : on peut passer d'une orientation (H, H, H, Lévo) à (H, H, H, Dextro) via la séquence :

- (H, H, H, L) → mouvement sphérique de l'arc externe du 1^{er} rond → (AH, H, H, D)
- (AH, H, H, D) → mouvement sphérique de l'arc externe du 2^{ième} rond → (AH, AH, H, L)
- (AH, AH, H, L) → mouvement sphérique de l'arc externe du 3^{ième} rond → (AH, AH, AH, D)
- (AH, AH, AH, D) → rotation de 180° autour d'un axe d'un plan de mise à plat → (H, H, H, D)

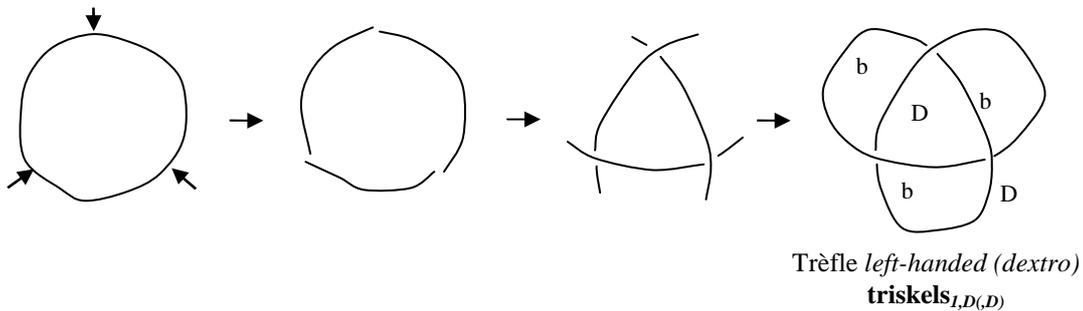


1.3.2 Les nœuds trèfles ou *triskels*_{1,Gi,Ge=Gi}

L'ouverture du rond puis la formation de 3 croisements en permet la transformation en triskel. Des épissures joignant les arcs ouverts sont ensuite réalisées. Le second membre de cette famille **triskels**_{n,Gi} : **triskels**_{1,Gi}, est donc le trèfle, constitué d'un triskel central et d'arcs externes qui se raboutent pour former des boucles sans croisement. Le trèfle est le premier nœud propre non trivial de la théorie des nœuds et chaînes.



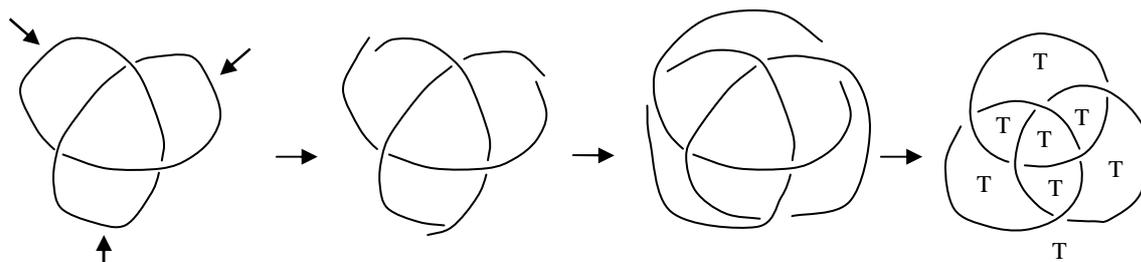
On distinguera **triskels**_{1,L(L)} le trèfle gauche dextrogyre de **triskels**_{1,D(D)}, trèfle droit, lévogyre.



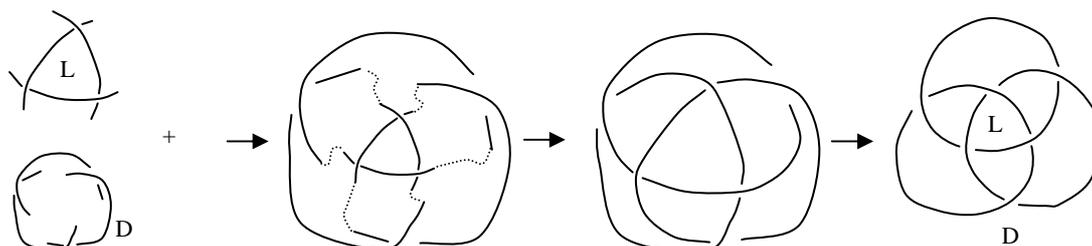
La possibilité de créer à ce niveau deux nœuds distincts vient du fait qu'au moment de la création des croisements alternants, il n'y a pas, à ce stade de la construction, de croisement pré-existant contraignant une orientation gauche ou droite. Ce ne sera plus le cas par la suite.

1.3.3 La chaîne borroméenne ou *triskels*_{2,Gi,Ge=-Gi}

L'étape suivante ouvre le trèfle sur ses arcs externes, crée de nouveaux croisements dont les dessus-dessous sont en alternance avec leurs croisements connexes (ce qui change la gyrie du groupement de ces trois croisements), pour ensuite réaliser de nouvelles épissures. Le résultat, troisième membre de cette famille **triskels**_{n,Gi}, est la chaîne borroméenne à 6 croisements.



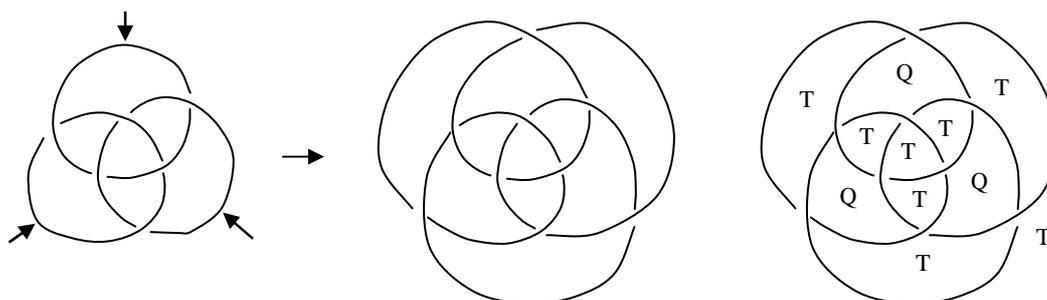
Les trois croisements externes, nouvellement créés, constituent un ensemble de gyrie opposée à la gyrie du triskel initial. Le borroméen peut être ainsi considéré comme le raccordement de deux triskels d'orientations opposées : un triskel interne (ci-dessous lévogyre) et un triskel 'externe' (ci-dessous dextrogyre, la gyrie est ici observée depuis le point de vue extérieur, situé à l'infini).



1.3.4 Les nœuds 9-40 ou triskels $_{3, Gi, (Ge = Gi)}$ ou borrorond

Pour construire un 9-40 à partir de la chaîne borroméenne, il suffit d'ouvrir à nouveau chacun des trois arcs externes de la chaîne borroméenne⁹, et de procéder aux rabouages des portions d'arcs ainsi ouverts en respectant l'alternance des dessus-dessous des croisements.

C'est ainsi le composé résultat de l'interaction (moyennant 3 croisements "médiants") d'un borroméen à 6 croisements avec un rond, que j'appelle donc encore "**borrorond**"¹⁰.



Construction du 9-40 *alias* borrorond à partir d'un borro

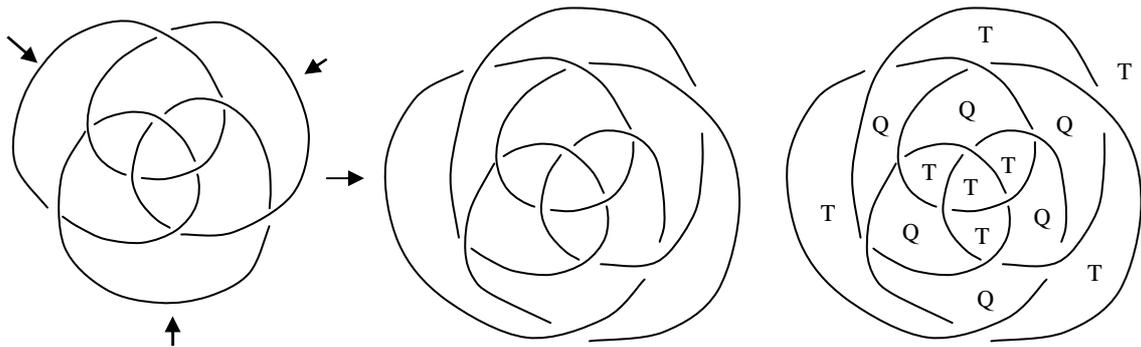
⁹ À propos de cette opération d'ouverture de la chaîne borroméenne, on pensera encore à celle que pratique Lacan pour faire apparaître des zones externes à la chaîne où il situe symptôme, inhibition et angoisse. Cf. par exemple sa conférence "La troisième" du 1^{er} novembre 1974, et son séminaire *R.S.I.*, 1974-1975, séances du 10 et du 17 décembre 1974.

¹⁰ Attention : la construction de cette appellation n'indique pas le procédé de composition ayant présidé à la construction du nœud, à savoir que la composition du borro avec le rond se fait par insertion de trois croisements alternants qui ne sont pas à oublier (d'autres procédés de composition existent, conduisant à d'autres nœuds).

Le 9-40 est chiral, il y a donc à distinguer les nœuds *triskels*_{3,L(L)} et *triskels*_{3,D(D)}.

1.3.5 *Le triskels*_{4,Gi(Ge = -Gi)} ou borrotrefle

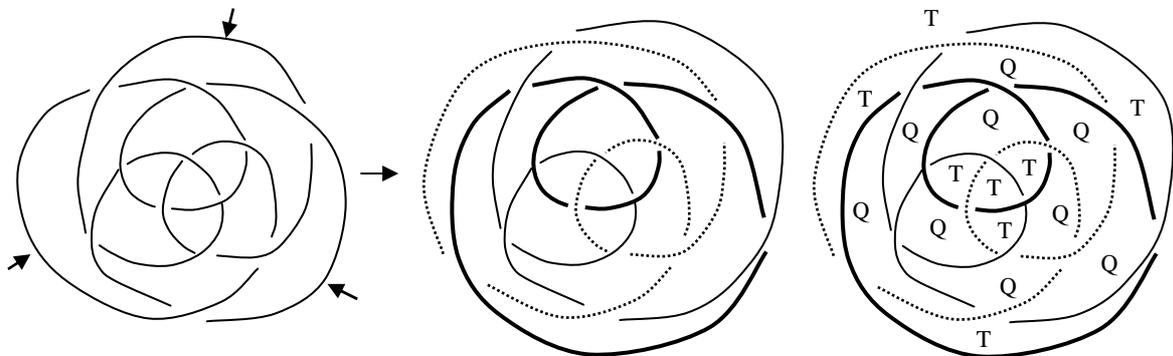
En itérant sur le 9-40 on obtient un nœud propre (une seule consistance) à 12 croisements. C'est le composé (moyennant 3 croisements "médiants") d'un borroméen à 6 croisements et d'un trèfle, que j'appelle ici "**Borrotrefle**".



Construction borrotrefle à partir d'un 9-40

1.3.6 *Les triskels*_{5,Gi(Ge = Gi)}

En itérant le procédé sur le nœud précédent, on obtient une chaîne à trois consistances et 15 croisements. Cette chaîne est, tout comme la chaîne borroméenne à 6 croisements, brunnienne¹¹.



Construction de la chaîne *triskels*_{5,Gi} alias borrorrob à 15 croisements à partir du *triskels*_{4,Gi}

1.4 Généralisation de la construction – le nœud ou la chaîne *triskels*_{n,Gi(Ge)}

Le procédé de construction peut être ainsi répété. À l'issue de la $n^{\text{ième}}$ étape, le nœud ou la chaîne *triskels*_{n,Gi} obtenu, $(n+1)^{\text{ième}}$ membre de cette famille, aura :

- $3.n$ croisements

¹¹ Un entrelacs (= une chaîne) brunnien est un entrelacs non trivial (ses composants sont liés) qui devient trivial si l'un quelconque de ses composants est enlevé. L'entrelacs brunnien le plus simple et le plus connu est le nœud borroméen (6 croisements dans sa représentation alternée habituelle).

Ce nom vient de Hermann Brunn qui, le premier, a étudié ces entrelacs dans son article "Über Verkettung" de 1892.

- 1 triskel (et 1 triskel externe) et 3 boucles si $n = 1$;
7 triskels (et 1 triskel externe) et $3.(n-2)$ quadriskels si $n \geq 2$
- 3 consistances si $(n+1)$ est multiple de 3, 1 consistance sinon.

Ainsi, par exemple, le nœud **triskels**_{0,-} est le nœud trivial, soit le rond simple.

Le nœud **triskels**_{1,Gi,(Ge)} est le trèfle standard de gyrie Gi.

La chaîne **triskels**_{2,Gi,(Ge)} est la chaîne brunnienne à 6 croisements, soit le borroméen habituel. La gyrie est ici indiquée pour spécifier la présentation qui entrera dans les compositions ultérieures.

Le nœud **triskels**_{3,Gi,(Ge)} est le noeudnuphare-borrorond-9-40.

Le nœud **triskels**_{4,Gi,(Ge)} est le borrotrèfle à 12 croisements.

La chaîne **triskels**_{5,Gi,(Ge)} est la chaîne brunnienne borrorrob à 15 croisements.

...

1.5 L'opération de composition de présentations emboîtées \oplus_{x3}

Principe et schéma de cette composition ont été donnés dans le résumé introductif de cette section.

Si p et q sont des entiers naturels tels que l'on peut écrire $n = p + q + 1$, le $n^{\text{ième}}$ membre de cette famille **triskels** _{$n+1$} est le composé - *via* l'intercession de 3 croisements "médians" ou "d'interaction" - d'un $p^{\text{ième}}$ membre de la famille **triskels** _{$p,Gi,(Ge)$} avec un $q^{\text{ième}}$ membre de la famille **triskels** _{$q,Gi',(Ge')$} .

Il peut être encore nommé **triskels** _{$p,Gi,(Ge) \oplus_{x3} \text{triskels}_{q,Gi',(Ge')}$} .

Le nombre 3 dans ce nom d'opération indique le nombre de croisements participant à la liaison entre **triskels** _{$p,Gi,(Ge)$} et **triskels** _{$q,Gi',(Ge')$} .

Rappelons que pour que la composition par des croisements intermédiaires produise un nœud alterné de la famille **triskels** _{n} , la condition $Ge = Gi'$ doit être respectée.

Ainsi, par exemple, la composition de deux trèfles de mêmes gyries (ex : **triskels**_{1,D}) donne un 9-40 de même gyrie :

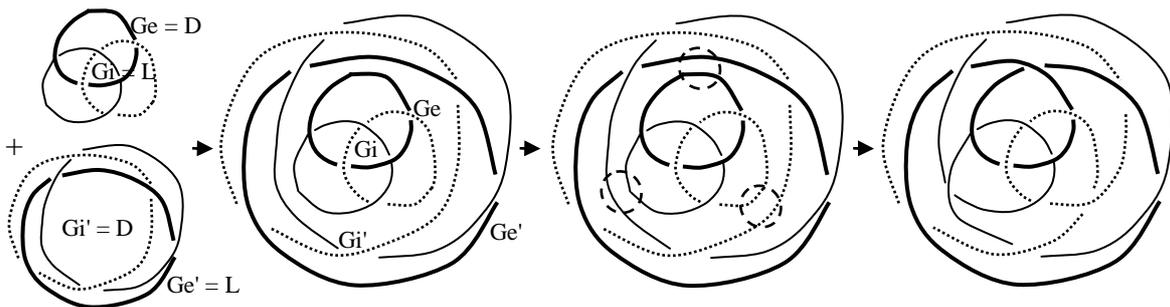
$$\mathbf{triskels}_{1,D,D} \oplus_{x3} \mathbf{triskels}_{1,D,D} = \mathbf{triskels}_{3,D,D} = 9-40\text{-Dextro}$$

Ce nœud est encore le même que la composition d'une présentation d'un borroméen de même gyrie (ex : **triskels**_{2,D}) avec un rond :

$$\mathbf{triskels}_{2,D,L} \oplus_{x3} \mathbf{triskels}_{0,-} = \mathbf{triskels}_{3,D,D} = 9-40\text{-Dextro}$$

Autre exemple, la composition de deux présentations de borroméens de gyries opposées donne la chaîne brunnienne à 15 croisements, que je nomme ici "**Borrorrob**" :

$$\mathbf{triskels}_{2,D,L} \oplus_{x3} \mathbf{triskels}_{2,L,D} = \mathbf{triskels}_{5,D,D}$$



Cette chaîne est encore égale à la composition d'un 9-40 avec un trèfle de même gyrie :

$$\mathbf{triskels}_{3,D,D} \oplus_{x3} \mathbf{triskels}_{1,D,D} = \mathbf{triskels}_{5,D,D}$$

ou encore d'un $\mathbf{triskels}_{4,D,L}$ avec un rond :

$$\mathbf{triskels}_{4,D,D} \oplus_{x3} \mathbf{triskels}_{0,-} = \mathbf{triskels}_{5,D,D}$$

Lorsque la condition $Ge = Gi'$ n'est pas respectée, les présentations ne peuvent entrer en composition par l'opération \oplus_{x3} .

Ainsi, si l'on tente d'établir 3 croisements entre deux trèfles de chiralités différentes, le résultat ne sera pas un nœud alterné et ne sera donc pas un membre de la famille $\mathbf{triskels}_{n,Gi,Ge}$.

Par contre une chaîne borroméenne se combine, *via* une composition \oplus_{x3} de présentation, avec tous les nœuds et chaînes qui ont une présentation dans la famille $\mathbf{triskels}_{n,Gi,Ge}$. Pour chaque combinaison il convient cependant de choisir la présentation du borro avec la bonne gyrie.

1.6 L'opération de composition de présentations en vis-à-vis $\#_{x3}$

Le principe de cette opération a été décrit dans le résumé de l'annexe. Je rappelle que la composition se fait maintenant non plus entre les arcs externes du premier nœud et les arcs internes du second nœud, mais entre les arcs externes du 1^{er} et du 2nd nœud, et, pour procéder à une composition en vis-à-vis de deux membres $\mathbf{triskels}_{p,Gi,Ge}$ et $\mathbf{triskels}_{q,Gi',Ge'}$ de la famille $\mathbf{triskels}_n$, la condition sur les gyries est désormais : $Ge = Ge'$.

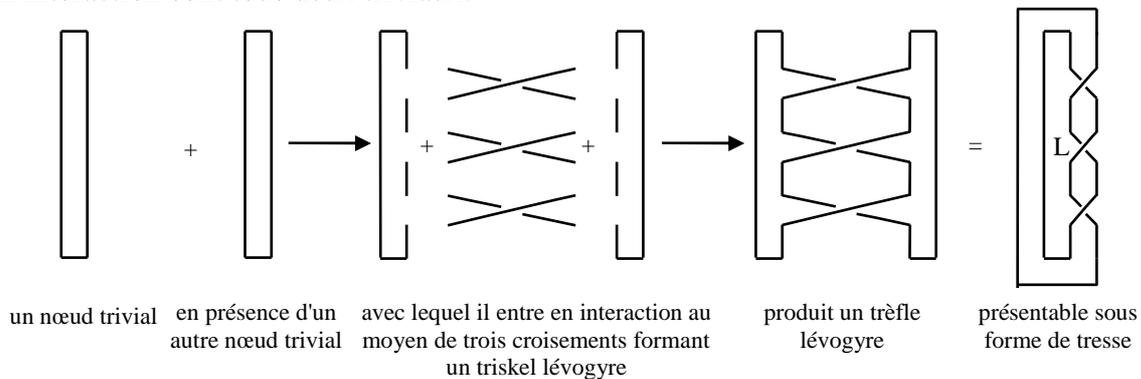
Voici quelques exemples de telles compositions.

1.6.1 Les nœuds trèfles ou $\mathbf{triskels}_{1,G,G}$

On peut considérer le trèfle comme résultat de la composition d'un rond avec ... un autre rond. L'interaction procède de 3 croisements médians faisant passage entre les deux ronds. En voici une présentation en tresses "rectangulaires", produisant un trèfle lévogyre. Il suffit de changer les dessus-dessous des croisements d'interface pour obtenir un trèfle dextrogyre.

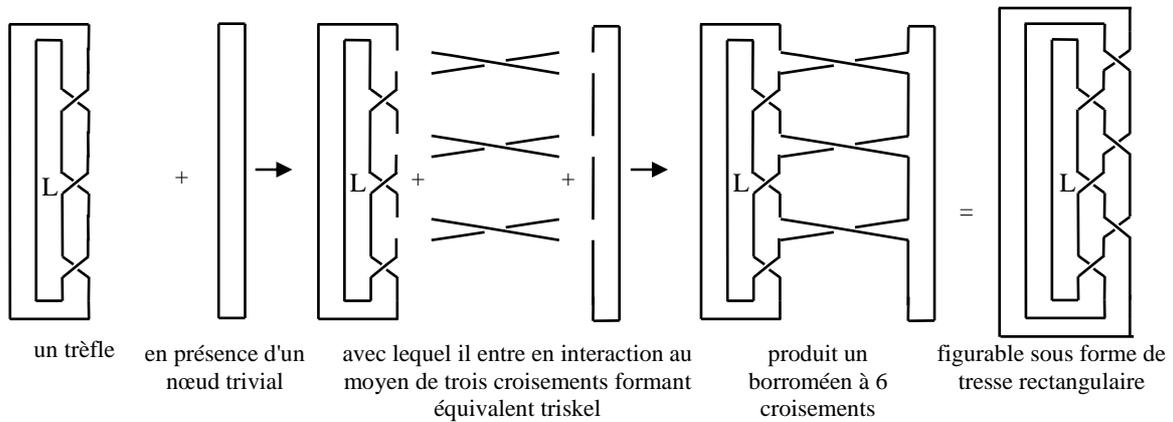
$$\mathbf{triskels}_{0,-} \#_{x3,L} \mathbf{triskels}_{0,-} = \mathbf{triskels}_{1,L,L} = \text{trèfle lévogyre (right-handed)}$$

Ici un paramètre L (alternativement D) d'orientation de la composition a été ajouté dans l'opérateur $\#_{x3}$ pour tenir compte des deux possibilités d'orientation lorsque les nœuds entrant en interaction sont tous deux triviaux.



1.6.2 La chaîne borroméenne ou triskels_{2,Gi,(Ge = -Gi)}

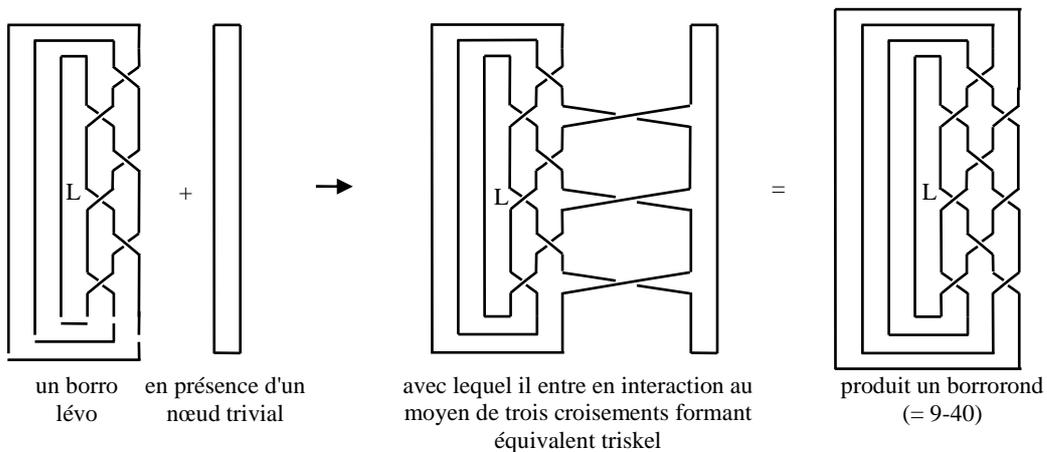
Le borro est un trèfle composé avec un rond *via* 3 croisements médians (soit un équivalent triskel).



1.6.3 Les 9-40 ou triskels_{3,Gi,Ge}

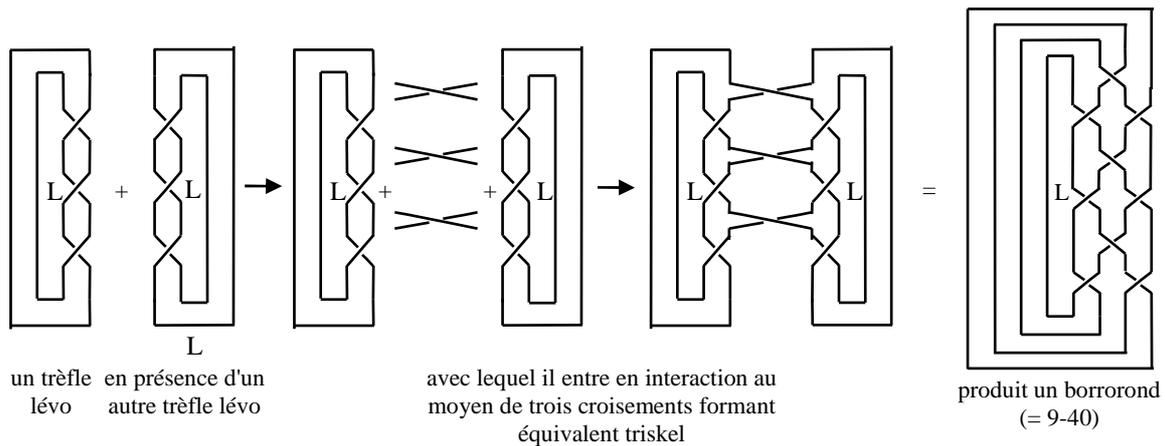
Ci-après, une construction en vis-à-vis du 9-40-borrond (lévogyre) en composant un borroméen avec un rond.

$$\mathbf{triskels}_{2,L,D\#_x3} \mathbf{triskels}_{0,-,-} = \mathbf{triskels}_{3,L,L} = 9-40 \text{ lévo}$$



Ci-après une autre construction du même 9-40 composant deux trèfles lévogyres.

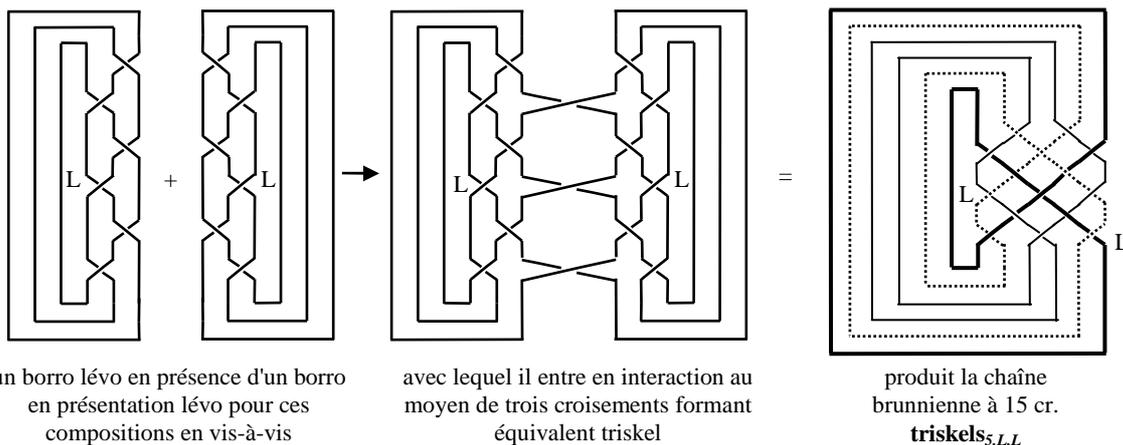
$$\mathbf{triskels}_{1,L,L\#_x3} \mathbf{triskels}_{1,L,L} = \mathbf{triskels}_{3,L,L} = 9-40 \text{ lévo}$$



1.6.4 Les chaînes brunniennes $\text{triskels}_{5,G,G}$

Voici encore un exemple de présentation avec tresses, cette fois pour la chaîne brunnienne $\text{triskels}_{5,G}$, composée de deux borroméens.

$$\text{triskels}_{2,L,D} \#_{x3} \text{triskels}_{2,L,D} = \text{triskels}_{5,L,L}$$



Ce qui démontre qu'un borrorrob n'est pas différent d'un borroborro, et l'inverse.

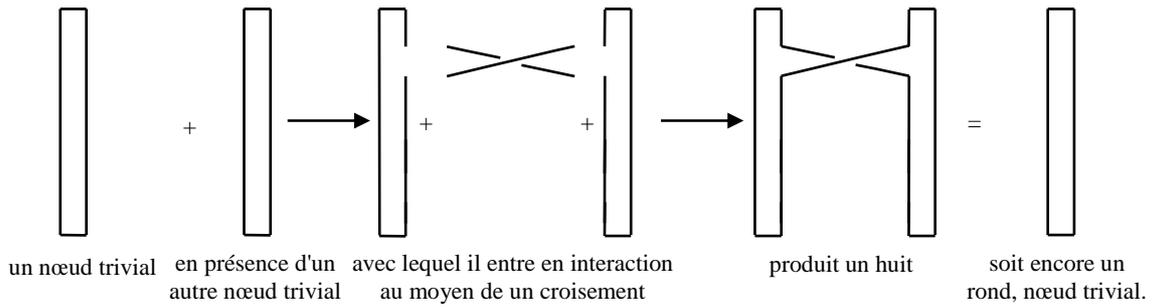
1.7 Généralisation du nombre de croisements d'interaction à c croisements entrant dans la composition $\#_{x3}$

Les constructions précédentes utilisent 3 croisements d'interaction. On peut généraliser l'opérateur de composition $\#_{x3}$ en $\#_{xc}$, où c est le nombre de croisements d'interaction.

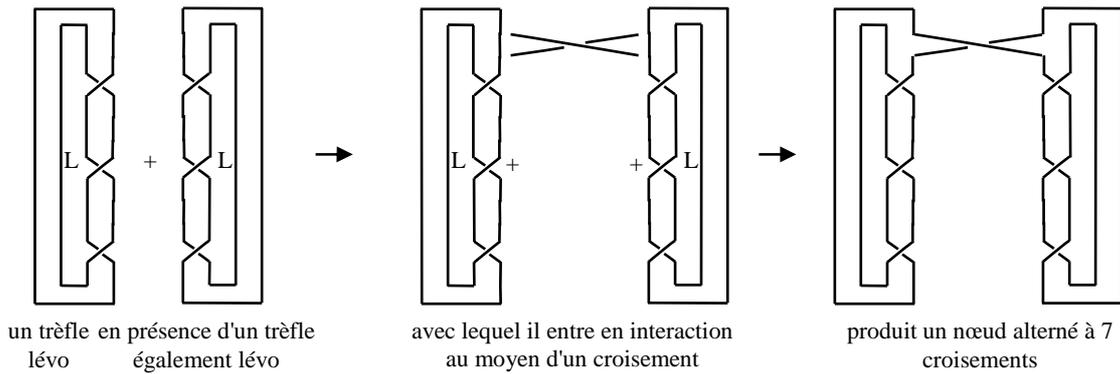
1.7.1 Le cas $c = 1$

Il permet la composition de deux nœuds alternés à l'aide d'un croisement qui respecte les alternances.

Certes l'interaction de deux ronds *via* $c = 1$ seul croisement produit un 8 qui ne tient pas en tant que nœud.



Mais par exemple deux trèfles de mêmes gyries se composent ainsi pour produire un nœud alterné à 7 croisements composé de deux nœuds premiers (les trèfles) que je note $\text{triskels}_{I,G} \#_{x1} \text{triskels}_{I,G}$.

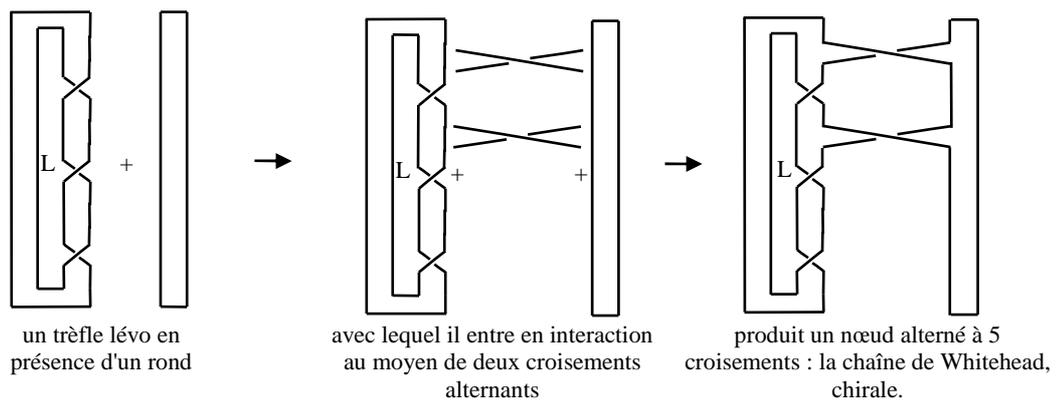


1.7.2 Le cas $c = 2$

1.7.2.1 Les chaînes de Whitehead

La chaîne de Whitehead est la composée, *via* deux croisements d'interface, d'un trèfle et d'un rond.

$$\text{Whitehead}_G = \text{triskels}_{I,G} \#_{x2} \text{triskels}_{0,-,-}$$



La chaîne de Whitehead est chirale et hérite cette chiralité du trèfle. Il y a donc à distinguer à deux chaînes de Whitehead, tout comme pour les trèfles.

1.7.2.2 Les chaînes de huit intriqués

Autre exemple, la chaîne de huit intriqués 8-2-7 peut être vue comme la composée, moyennant deux croisements d'interface, de deux trèfles de mêmes gyries.

$$8-2-7_G = \text{triskels}_{I,G} \#_{x2} \text{triskels}_{I,G}$$

Le G en indice du nom 8-2-7 est destiné à distinguer les deux versions du 8-2-7, puisque cette chaîne est, tout comme le trèfle, chirale¹².

1.8 Extension du procédé pour produire des enlacements

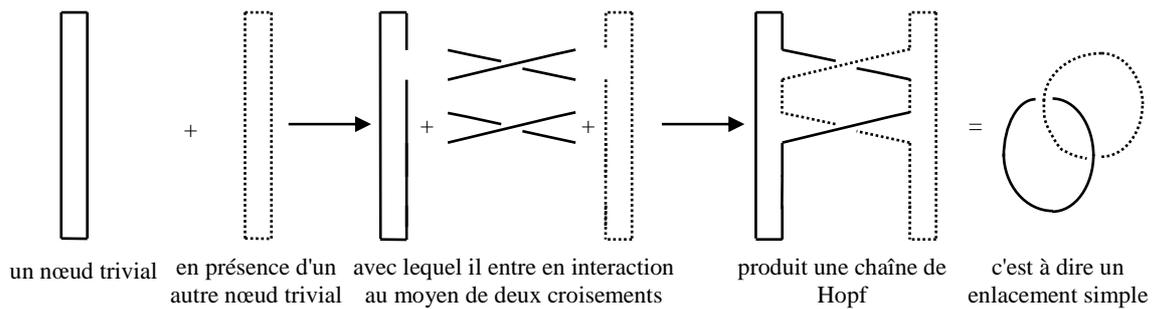
La généralisation précédente concernait la paramétrisation du nombre c d'arcs externes de chacun des nœuds entrant en composition avec un arc externe de l'autre nœud *via* 1 (un croisement alternant).

On paramétrise maintenant ce dernier nombre de croisements établis entre deux arcs externes à l'aide de la variable e .

Lorsque $e = 2$ des enlacements sont engendrés au niveau de chaque couple d'arcs.

Ainsi l'interaction de deux ronds au moyen de deux croisements produit la chaîne de Hopf, soit l'enlacement de deux ronds, seul objet à 2 croisements de la théorie des nœuds et chaînes.

$$\text{chaîne de Hopf} = \text{triskels}_{0,-,-} \#_{x,c=1,e=2} \text{triskels}_{0,-,-}$$



2 Structure graphique de la famille $\text{triskels}_{n,Gi,(Ge)}$

Je rappelle¹³ une correspondance proposée entre les structures graphiques et les nouages, *via* les surfaces. Les graphes peuvent se traduire en nouages en utilisant une étape intermédiaire "surface". Il s'agit, pour un graphe donné, de construire une surface moyennant le procédé de construction suivant :

- à un sommet de graphe correspond un disque de surface (pastille grisée),
- à une arête de graphe correspond une bretelle torsadée reliant deux pastilles.

Le bord de la surface ainsi construite correspond à un nœud ou à une chaîne.

Pour exemples, ce procédé conduit aux traductions suivantes :

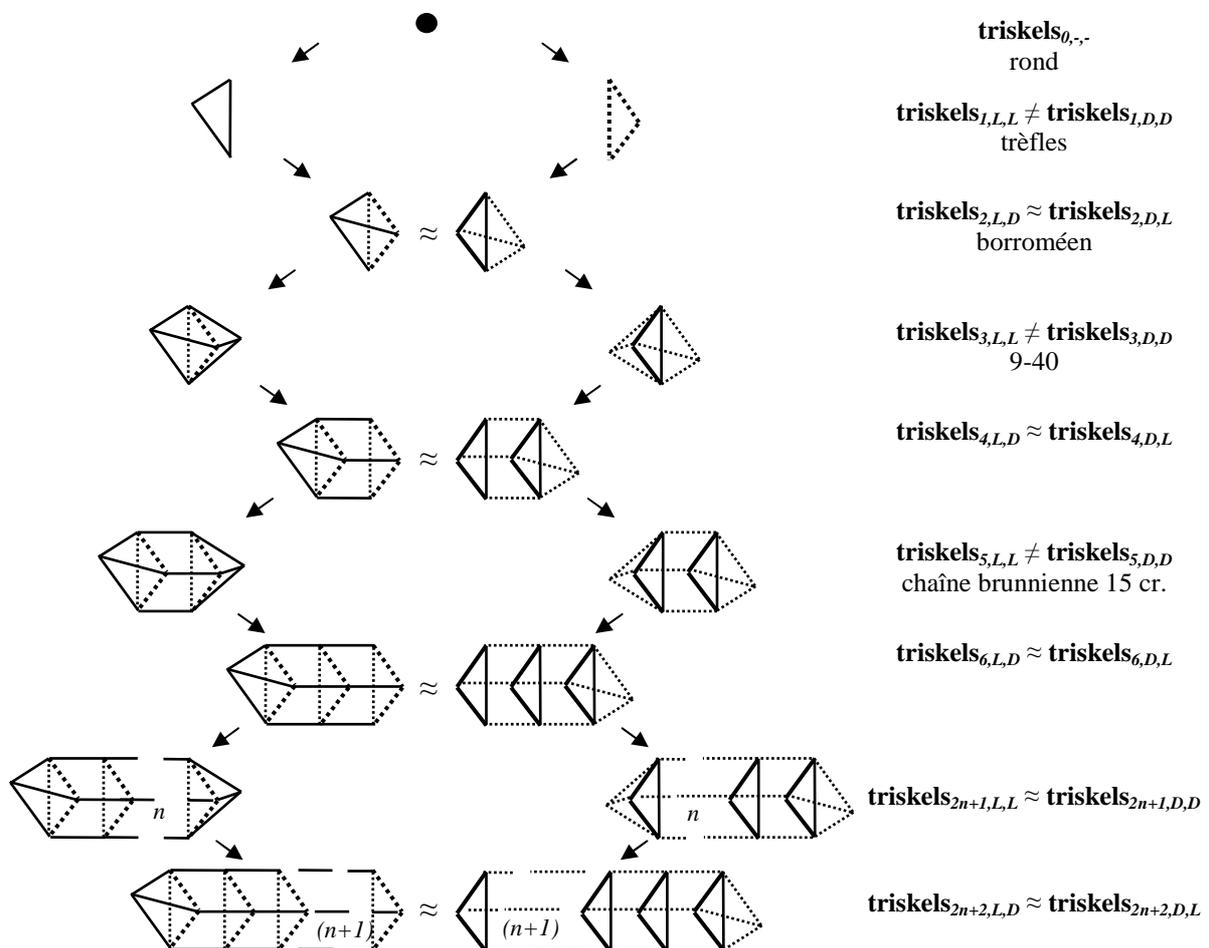
¹² source <http://knotilus.math.uwo.ca/draw.php?knot=1,-4,2,-7,6,-8:4,-1,3,-2,5,-6,7,-5,8,-3>

¹³ cf. Marc Saint-Paul, "Topologie et schématisation RL pour la psychanalyse", 2015.

graphe à 1 sommet et 0 arête	→ triskels _{0,-,-}	rond
graphe triangulaire à 3 sommets et 3 arêtes	→ triskels _{1,G,(G)}	trèfle lévo ou dextro, 2 hélicités possibles
graphe pyramidal à 4 sommets et 6 arêtes	→ triskels _{2,G,(1-G)}	borroméen 2 gyries de présentation possibles
graphe dipyramidal à base triangulaire à 5 sommets et 9 arêtes	→ triskels _{3,G,G}	9-40 lévo ou dextro 2 hélicités possibles

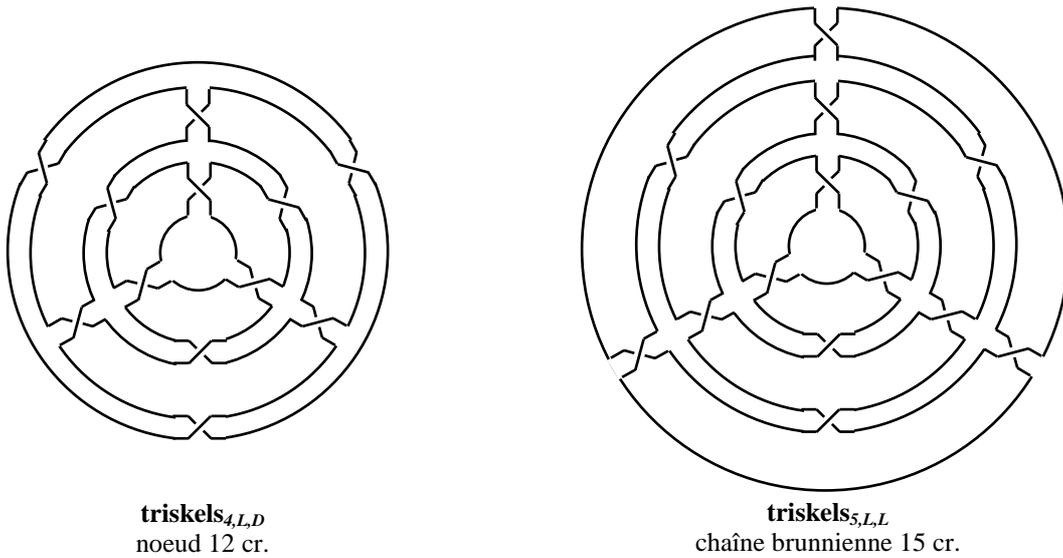
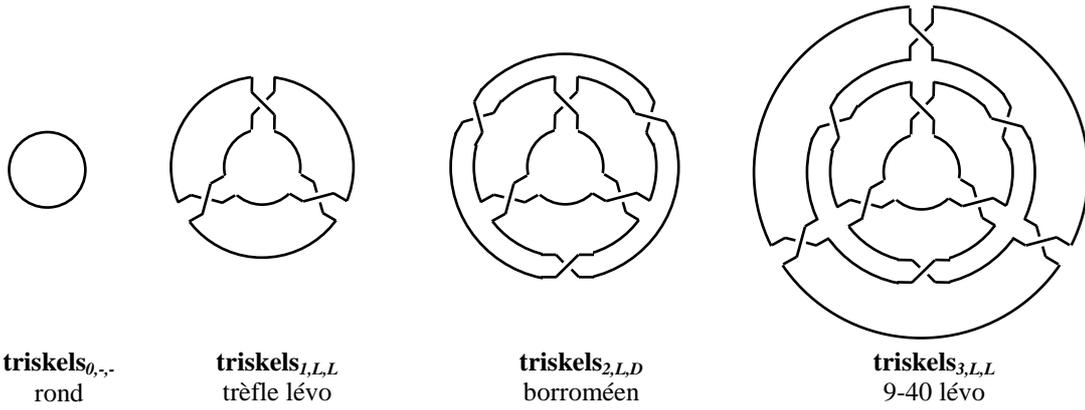
2.1 Une figuration géométrique de la famille **triskels**_{n,Gi,(Ge)}

Le schéma suivant montre la construction de la famille des figures géométriques à la base de la famille des graphes qui correspond à la famille **triskels**_{n,Gi,(Ge)}. Dans ce schéma apparaissent les deux sous-familles **triskels**_{n,L,(Ge)} et **triskels**_{n,D,(Ge)}, représentées par des figures géométriques aux conventions graphiques opposées.

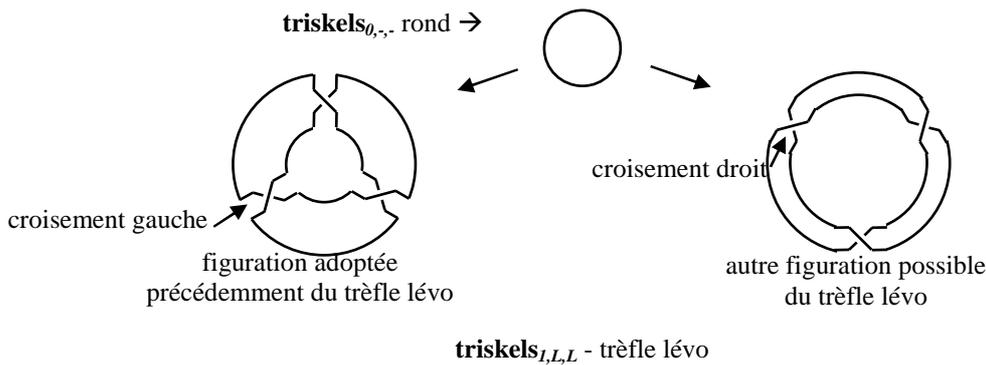


2.2 Une autre figuration 'mandala' des présentations **triskels**_{n,Gi,(Ge)}

Ci-après une autre convention de figuration est adoptée pour les présentations de la famille **triskels**_{n,Gi,(Ge)}, appliquée aux premiers membres lévo de la famille. Extensions aux suivants et passage aux dextro sont immédiats.



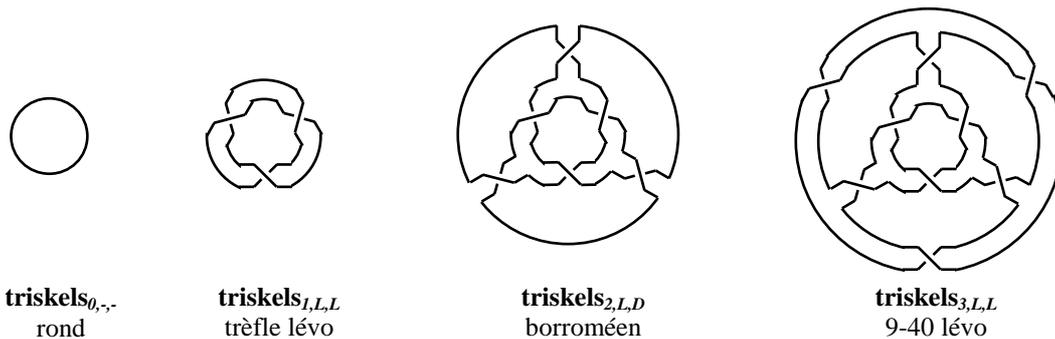
La convention duale aurait pu être adoptée pour faire croître la famille – qui rappelons-le peut croître indifféremment vers l'intérieur ou l'extérieur – à partir de cette figuration duale (cf. schéma suivant) du trèfle lévo.



Ces deux figurations sont duales car les croisements, vus dans l'axe de rétrécissement du couple de brins, sont vers la gauche pour la figuration ici à gauche organisée par rayonnement à partir d'un centre, et vers la droite pour la figuration circulaire ci-dessus à droite.

Cette distinction se verra mieux avec les surfaces d'empan respectives de ces représentations.

Avec cette convention duale les tout premiers nœuds lévos de la famille **triskels_n** prennent l'apparence suivante.



2.3 Une famille de graphes associés à la famille $\text{triskels}_{n,Gi(Ge)}$

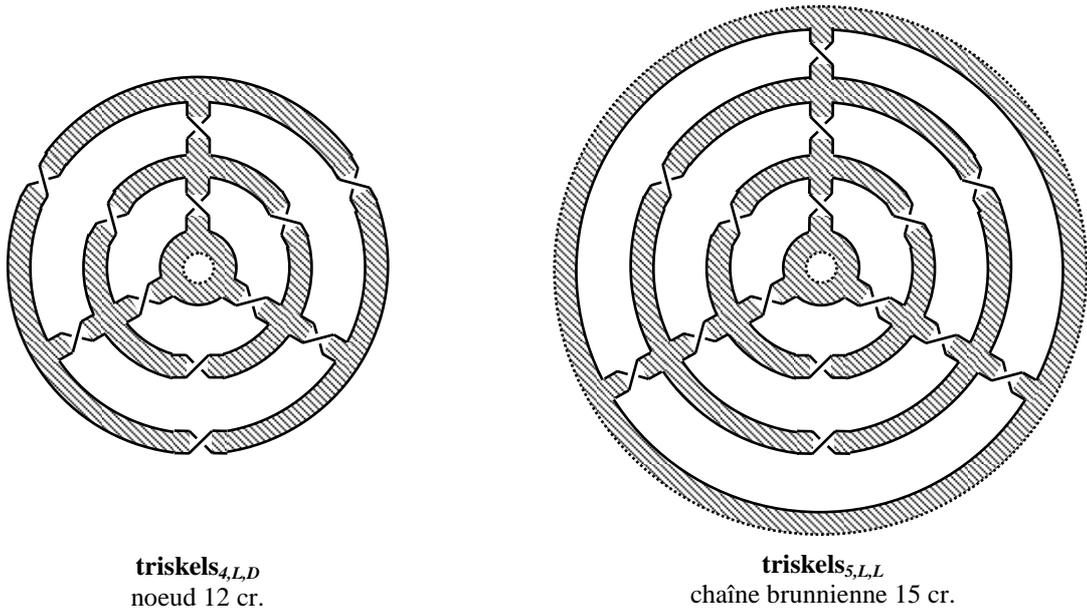
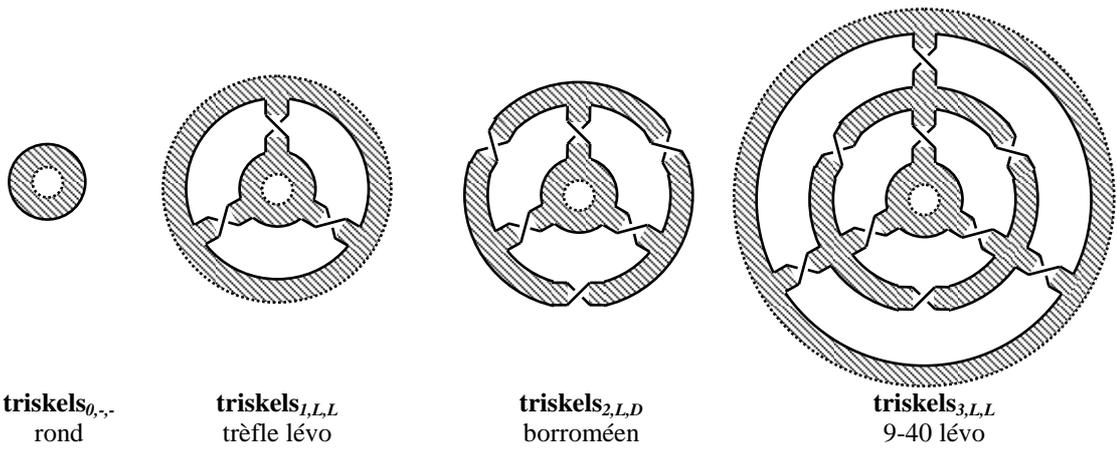
Nous pouvons maintenant traduire la famille précédente de présentations 'mandala' de nœuds en surfaces et en graphes, en adoptant les règles de traduction suivantes :

- à un doublet de brins sans croisement correspondent :
 - o une bande bilatère de surface
 - o et une arête simple de graphe.
- à un arc de brin simple (c'est le cas des arcs internes et externes des nœuds) correspondent :
 - o une portion bilatère de surface limitée par un bord
 - o et une arête simple de graphe.
- à un doublet de brins se croisant à droite correspondent :
 - o une bande bilatère de surface avec une torsion à droite
 - o et une arête avec encoche perpendiculaire de graphe.
- de même à un doublet de brins se croisant à gauche correspondent :
 - o une bande bilatère de surface avec une torsion à gauche
 - o et une arête avec encoche oblique de graphe.

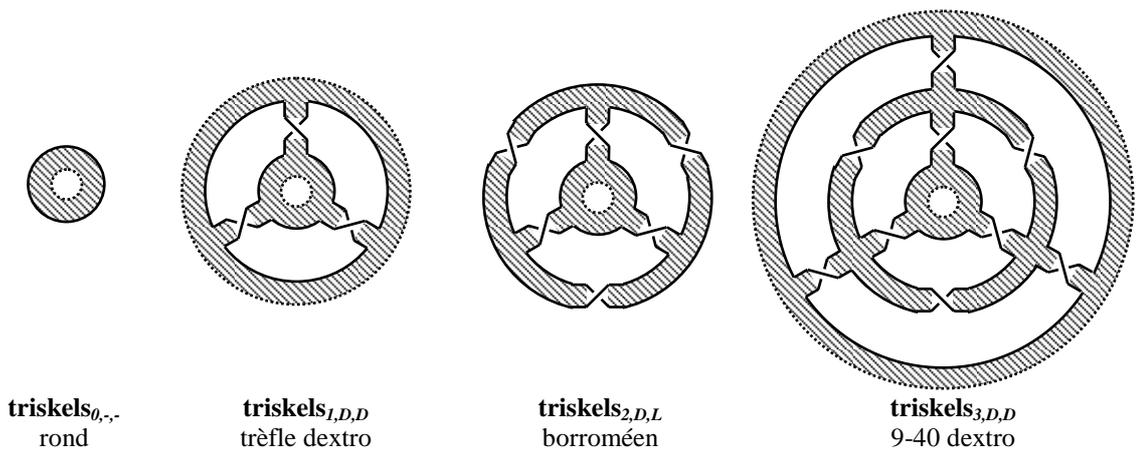
La figure suivante résume ce dictionnaire trilingue.

croisement gauche			
croisement droit			
deux arcs //			
arc simple interne ou externe			
	noeud	surface	graphe

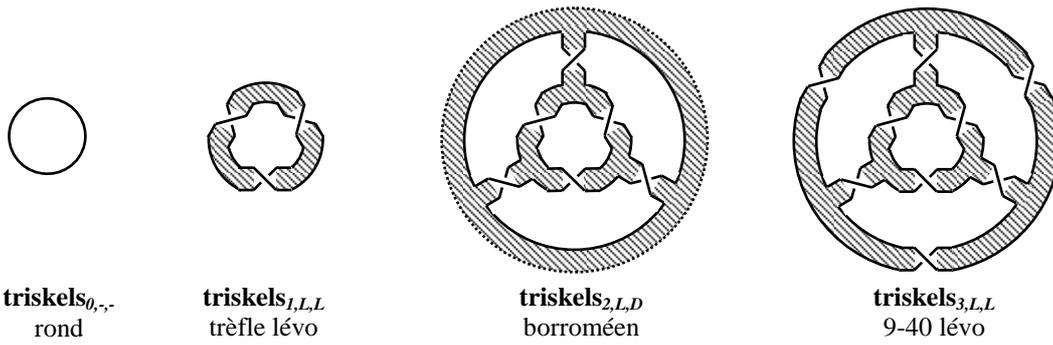
La figure suivante applique la traduction "surface" aux premiers membres lévo de la famille triskels_n . On remarque que toutes les torsions de surface d'empan de cette famille de présentations lévos sont 'gauches'.



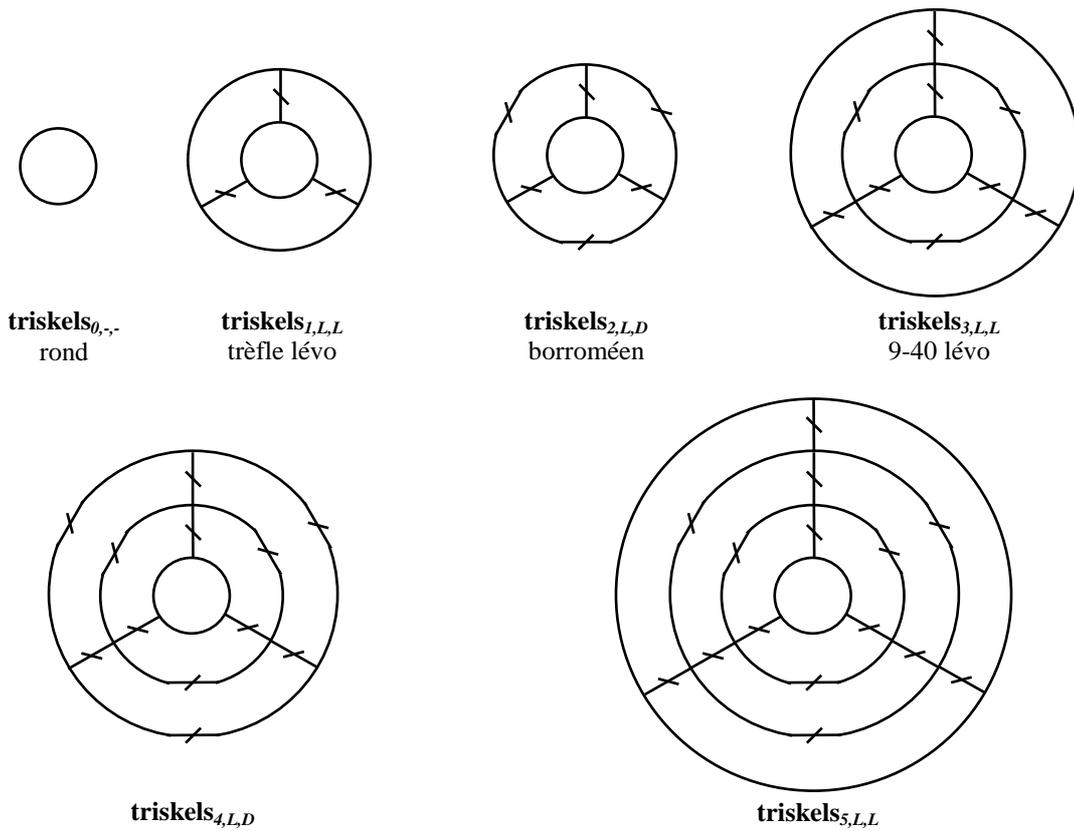
De même la figure suivante présente les surfaces d'empan des tous premiers membres dextro de la famille **triskels_n**. Ici toutes les torsions de surface d'empan de cette famille de présentations dextro sont 'droites'.



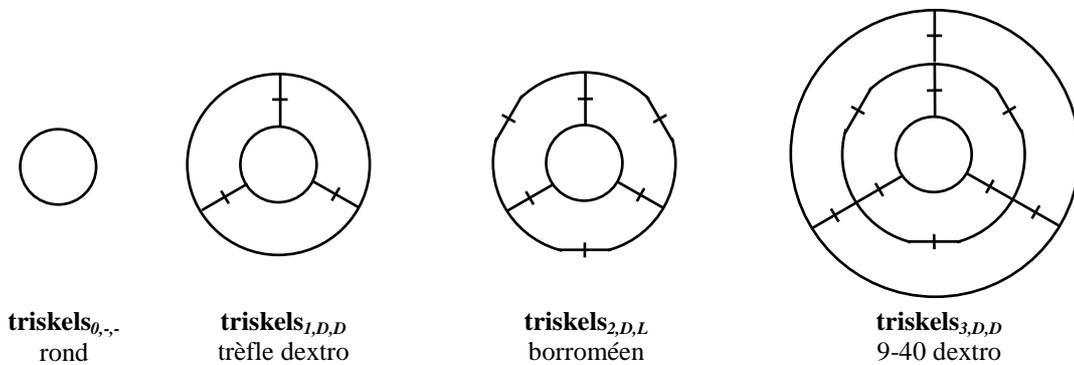
Ci-après les surfaces d'empan selon la convention duale.



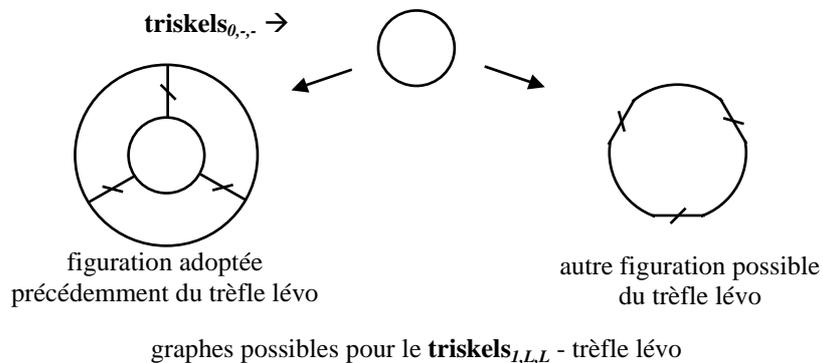
La figure suivante applique la traduction "graphe" aux premiers membres lévo de la famille **triskels_n**.



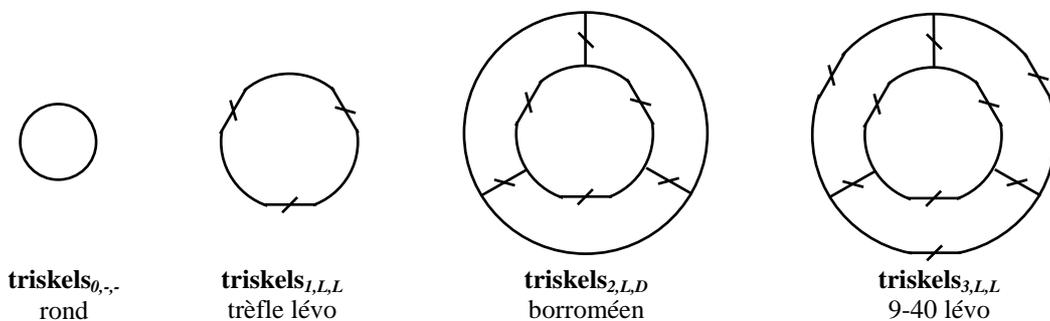
La figure suivante applique la traduction "graphe" aux tous premiers membres dextro de la famille **triskels_n**.



Comme pour la présentation 'mandala' des nœuds, une convention duale pour les figurations des graphes aurait pu être adoptée, cf. par exemple le graphe suivant correspondant au trèfle lévo.

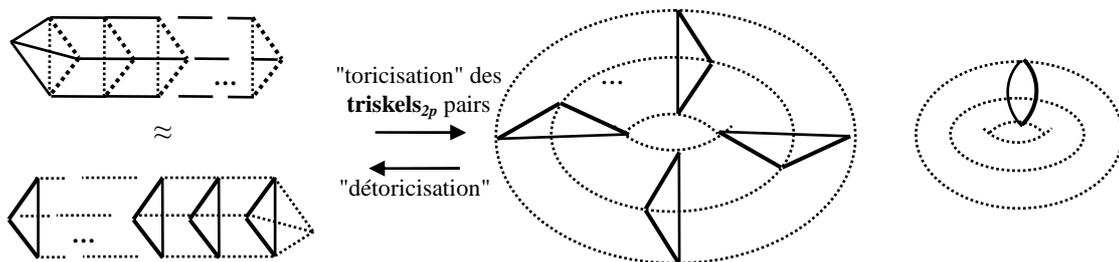


La figure suivante applique cette convention duale aux tous premiers membres lévo de la famille **triskels_n**.



2.4 D'une construction linéaire à une construction à rebouclement torique

On constate que la croissance de chaque sous-famille **triskels_{n,Gi,Ge}** se fait linéairement. Nous allons chercher maintenant à produire un opérateur permettant un rebouclage circulaire de cette croissance, selon une structure torique. Seuls les membres pairs **triskels_{2p,Gi,Ge=-Gi}** – communs aux deux sous-familles – supporteront cette opération.

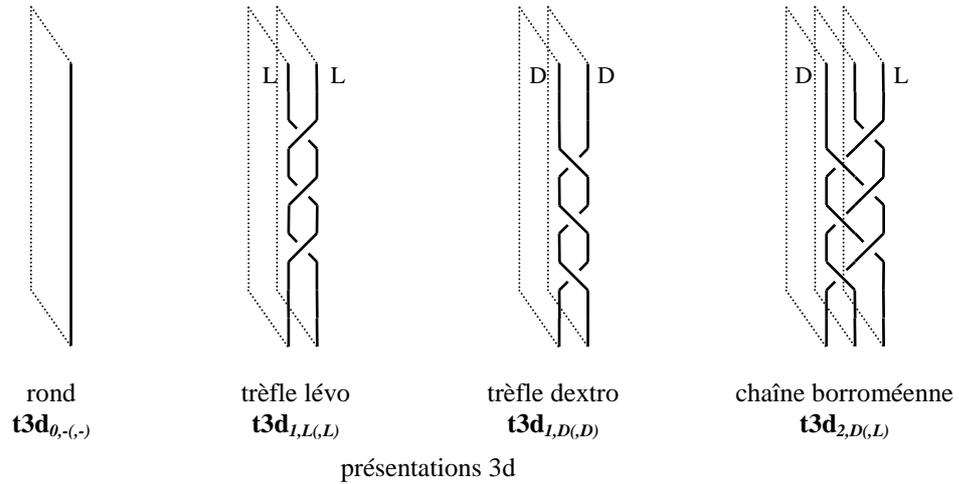


Pour cela nous aurons besoin d'une autre forme de présentation des composés de triskels.

3 Les présentations 3d des triskels_{n,Gg(Gd)}

3.1 la présentation 3d

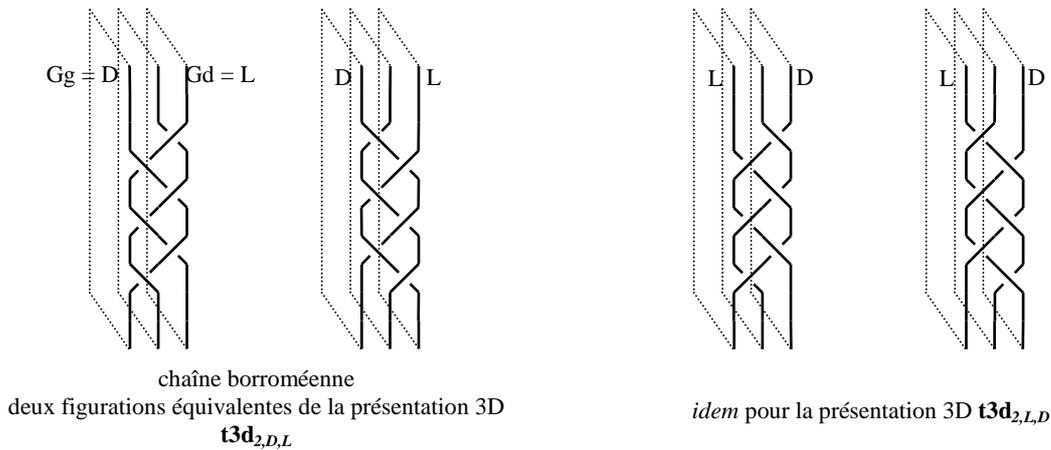
Les schémas ultérieurs vont utiliser une autre forme de présentation des nœuds et chaînes composés de triskels que j'appelle "tridimensionnelle" ou "3d".



Les nœuds et chaînes de la famille **triskels** $_{n,Gi(Ge)}$ acceptent une (ou deux, si n est strictement positif et pair) présentation(s) 3D que j'appellerai **triskels3d** $_{n,Gg(Gd)}$ ou encore **t3d** $_{n,Gg(Gd)}$.

Pour les présentations 3d **t3d** $_{n,Gg(Gd)}$, Gg est la gyrie vue de la gauche, et Gd est sa gyrie vue de la droite.

Par exemple, pour $n = 2$, cas de la chaîne borroméenne, voici ci-après deux figurations équivalentes pour chacune des deux présentations 3d **t3d** $_{2,L(D)}$ et **t3d** $_{2,D(L)}$.



3.2 L'opération de composition $\#_{x3}$ des présentations 3d

La composition $\#_{x3}$ sur les présentations de la famille de présentations "rectangulaires" **triskels** $_{n,Gi(Ge)}$ se transpose immédiatement à la famille de présentations 3d **t3d** $_{n,Gg(Gd)}$. Ainsi :

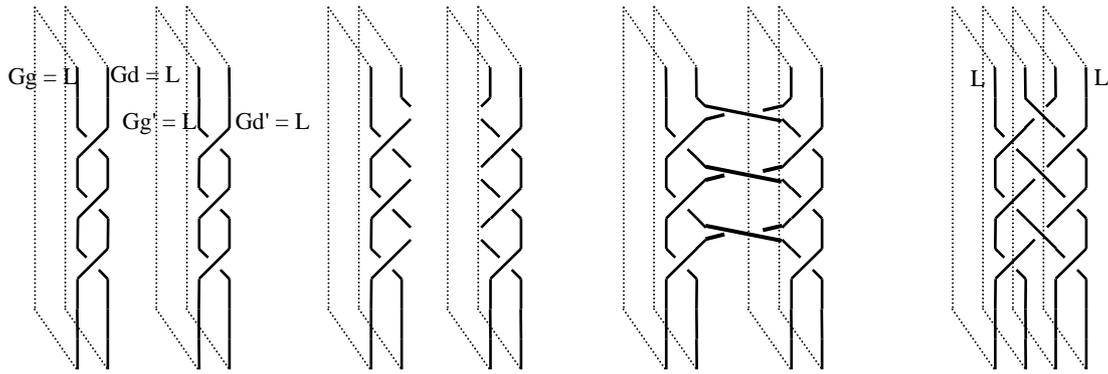
$$\mathbf{t3d}_{p,Gg(Gd)} \#_{x3} \mathbf{t3d}_{q,Gg'(Gd')} = \mathbf{t3d}_{p+q+1,Gg(Gd')}$$

La condition que doivent respecter les gyries pour que la composition soit possible s'écrit désormais :

$$Gd = Gg'$$

Par exemple, deux présentations 3D de trèfles lévo **t3d** $_{1,L,L}$ se composent avec l'opérateur $\#_{x3}$ pour produire un 9-40 lévo **t3d** $_{3,L,L}$:

$$\mathbf{t3d}_{1,L(L)} \#_{x3} \mathbf{t3d}_{1,L(L)} = \mathbf{t3d}_{3,L(L)}$$



Composition $\#_{x3}$ de deux présentations **triskels3d**_{I,L,L} :
ouverture des trèfles lévo et introduction de 3 croisements.
Le résultat est une présentation **triskels3d**_{3,L,L} du 9-40 lévo.

3.3 La composition additive directe $+_{=3}$ des présentations 3d

La composition déjà présentée $\#_{x3}$ se fait au moyen de l'introduction de trois croisements, entre des triskels de mêmes gyries.

La nouvelle composition $+_{=3}$ s'applique à des présentations 3D, elle ne fait pas intervenir de croisements et établit des liaisons entre triskels de gyries opposées. La condition sur les gyries de **t3d**_{p,Gg(Gd)} et **t3d**_{q,Gg'(Gd')} est donc :

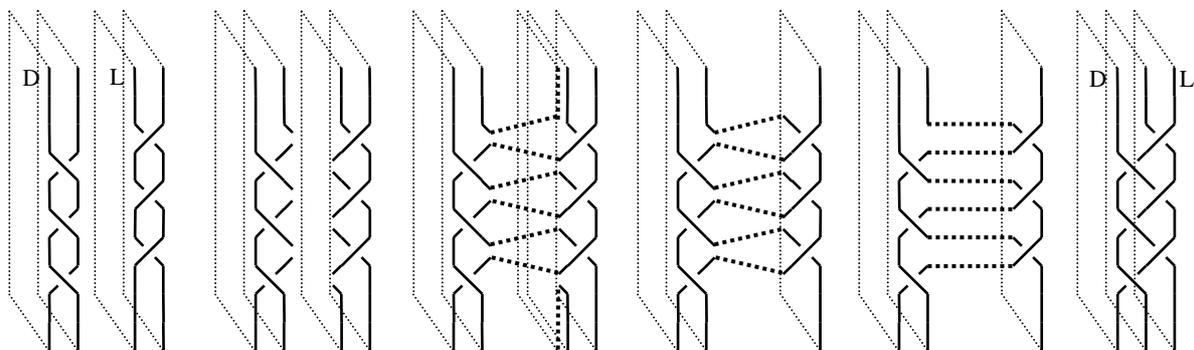
$$Gd \neq Gg', \text{ soit encore : } Gd = 1 - Gg'$$

L'exemple ci-après en montre le principe :

- (1) les deux présentations 3D de nœuds ou chaînes de la famille **t3d**_{I,D,D} sont positionnées avec un décalage : les croisements de l'une font face aux arcs externes de l'autre,
- (2) puis leurs arcs externes sont ouverts,
- (3) et un raboutage des brins se faisant face est effectué, réalisant ainsi le nouveau nœud qui est finalement mis au format de présentation 3D.

Ainsi un trèfle dextro **t3d**_{I,D,D} se compose par l'opérateur $+_{=3}$ avec un trèfle lévo **t3d**_{I,L(L)} pour produire une chaîne borroméenne **t3d**_{2,D,L} :

$$\mathbf{t3d}_{I,D(D)} +_{=3} \mathbf{t3d}_{I,L(L)} = \mathbf{t3d}_{2,D(L)}$$



positionnement décalé des trèfles,
ouverture des arcs, liaison des arcs.

élimination d'une boucle en pointillés,
mise en forme de présentation 3D.

Composition $+_{=3}$ des présentations **triskels3d**_{I,D,D} et **triskels3d**_{I,L,L}.
Le résultat est un **triskels3d**_{2,D,L} : présentation 3D du borroméen.

Si la condition sur les gyries $Gd \neq Gg'$ est respectée, l'opération $+_{=3}$ agit à la manière de l'addition de deux présentations 3D :

$$\mathbf{t3d}_{p,Gg(Gd)} +_{=3} \mathbf{t3d}_{q,Gg'(Gd')} = \mathbf{t3d}_{p+q,Gg(Gd')}$$

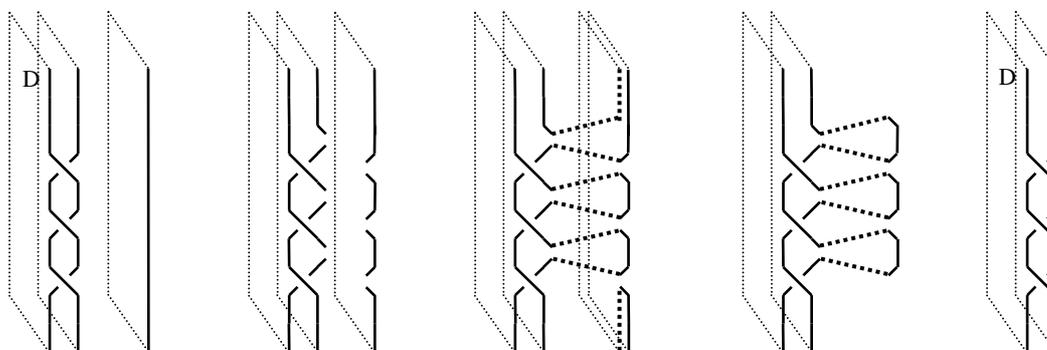
Cette opération peut s'appliquer à des couples de nœuds et chaînes plutôt qu'à leurs présentations 3D, sous condition qu'existe un couple de leurs représentations 3D qui respecte la condition sur les gyries $Gd \neq Gg'$.

Cette opération admet le rond $\mathbf{t3d}_{0,-(-)}$ pour élément neutre :

$$\mathbf{t3d}_{p,Gg(Gd)} +_{=3} \mathbf{t3d}_{0,-(-)} = \mathbf{t3d}_{0,-(-)} +_{=3} \mathbf{t3d}_{p,Gg(Gd)} = \mathbf{t3d}_{p,Gg(Gd)}$$

Par exemple :

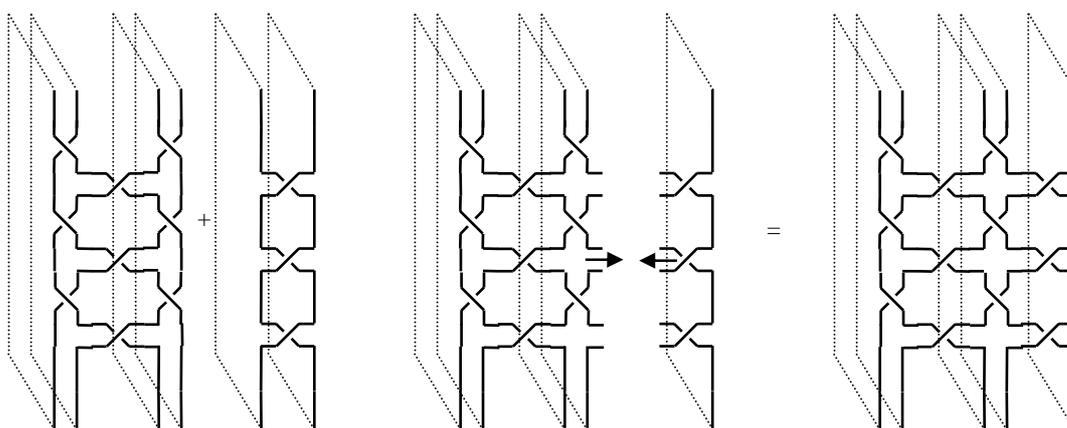
$$\mathbf{t3d}_{1,D,D} +_{=3} \mathbf{t3d}_{0,-(-)} = \mathbf{t3d}_{0,-(-)} +_{=3} \mathbf{t3d}_{1,D,D} = \mathbf{t3d}_{1,D,D}$$



$\mathbf{t3d}_{1,D,D}$ reste inchangé par une composition $+_{=3}$ avec $\mathbf{t3d}_{0,-(-)}$.

Voici un autre exemple de composition additive, ici celle d'un 9-40 dextro avec un trèfle lévo:

$$\mathbf{t3d}_{3,D,D} +_{=3} \mathbf{t3d}_{1,L,L} = \mathbf{t3d}_{4,D,L}$$



9-40 dextro

$\mathbf{t3d}_{3,D,D}$

addition $+_{=3}$

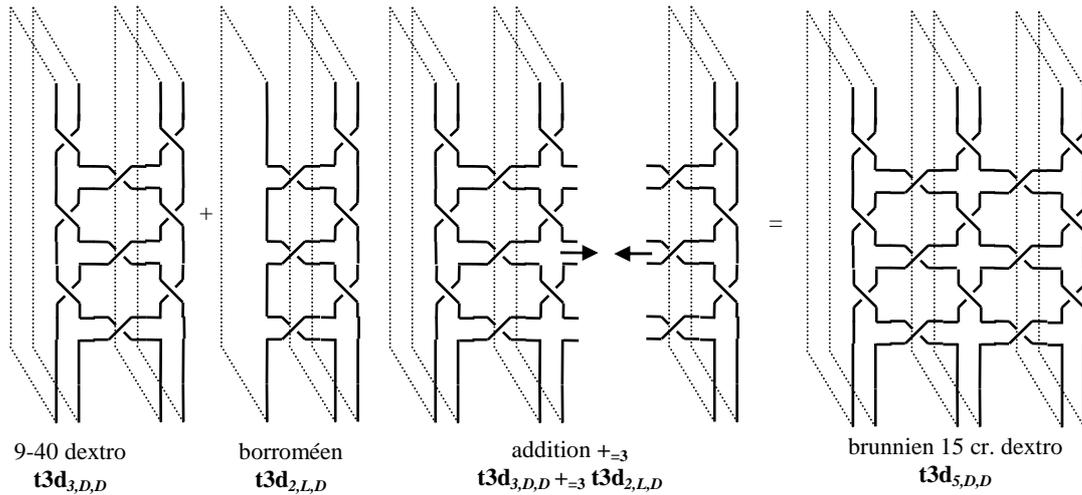
$\mathbf{t3d}_{3,D,D} +_{=3} \mathbf{t3d}_{1,L,L}$

nœud à 12 cr.

$\mathbf{t3d}_{4,D,L}$

Dernier exemple de composition additive, ici celle d'un 9-40 dextro avec un borroméen. Le résultat est la chaîne brunnienne borrorrob dextro :

$$\mathbf{t3d}_{3,D,D} +_{=3} \mathbf{t3d}_{2,L,D} = \mathbf{t3d}_{5,D,D}$$



3.3.1 Relation entre les compositions $\#_{x3}$ et $+_{=3}$

Il existe des relations entre $\#_{x3}$ et $+_{=3}$. Sauf erreur, elles peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{t}_{p,Gi,(Ge)} \#_{x3} \mathbf{t}_{q,Gi',(Ge')} \\
 &= \mathbf{t}_{p+q+1,Gi,(Ge')} \\
 &\approx \mathbf{t3d}_{p+q+1,Gi,(Ge')} \\
 &= \mathbf{t3d}_{p,Gg=Gi,Gd=Ge} \#_{x3} \mathbf{t3d}_{q,Gg'=Ge',Gd'=Gi'} \\
 &= \mathbf{t3d}_{p+1,Gg=Gi,Gd=1-Ge'} +_{=3} \mathbf{t3d}_{q,Gg'=Ge',Gd'=Gi'} \\
 &= \mathbf{t3d}_{p,Gg=Gi,Gd=Ge} +_{=3} \mathbf{t3d}_{q+1,Gg'=1-Ge',Gd'=Gi'}
 \end{aligned}$$

Le principe de la relation entre $\#_{x3}$ et $+_{=3}$ est que la composition $\#_{x3}$ de deux membres de la famille $\mathbf{t3d}$ de rangs p et q donne le même nœud composé que la composition $+_{=3}$ de deux membres de la famille $\mathbf{t3d}$ de rangs $p+1$ et q .

3.3.2 Tables pour la composition additive $+_{=3}$

Ci-après sont présentées deux tables de composition :

$$\mathbf{t3d}_{p,Gg,(Gd)} +_{=3} \mathbf{t3d}_{q,Gg'=1-Gd,(Gd')} = \mathbf{t3d}_{p+q,Gg,(Gd')}$$

(a) composition $+_{=3}$ de présentations, cas $Gd = L, Gg' = D$

$+_{=3}$	$0,-,-$	$1,D,D$	$2,D,L$	$3,D,D$	$4,D,L$...	q,D,Gd	...
$0,-,-$	$0,-,-$	$1,D,D$	$2,D,L$	$3,D,D$	$4,D,L$...	q,D,Gd	...
$1,L,L$	$1,L,L$	$2,L,D$	$3,L,L$	$4,L,D$	$5,L,L$...	$q+1,L,Gd$...
$2,D,L$	$2,D,L$	$3,D,D$	$4,D,L$	$5,D,D$	$6,D,L$...	$q+2,D,Gd$...
$3,L,L$	$3,L,L$	$4,L,D$	$5,L,L$	$6,L,D$	$7,L,L$...	$q+3,L,Gd$...
$4,D,L$	$4,D,L$	$5,D,D$	$6,D,L$	$7,D,D$	$8,D,L$...	$q+4,D,Gd$...
...
p,Gg,L	p,Gg,L	$p+1,Gg,D$	$p+2,Gg,L$	$p+3,Gg,D$	$p+4,Gg,L$...	$p+q,Gg,Gd$...
...

(b) composition $+_{=3}$ de nœuds et chaînes

Ci-après les nœuds et chaînes sont spécifiés par leur nombre de triskels et leur chiralité.

La case grisée na indique que la composition n'est pas applicable, la condition de gyries n'étant pas respectée.

$+_{=3}$	$0,-,-$	$1,L$	$1,D$	2	$3,L$	$3,D$	4	$5,L$	$5,D$...
$0,-,-$	0	$1,L$	$1,D$	2	$3,L$	$3,D$	4	$5,L$	$5,D$...
$1,L$	$1,L$	na	2	$3,L$	na			na		...
$1,D$	$1,D$	2	na	$3,D$		na			na	...
2	2	$3,L$	$3,D$...
$3,L$	$3,L$	na			na			na		...
$3,D$	$3,D$		na			na			na	...
4	4									...
$5,L$	$5,L$	na			na			na		...
$5,D$	$5,D$		na			na			na	...
...

3.4 La composition soustractive $-_{=3}$ des présentations 3d

La composition soustractive $-_{=3}$ s'applique à des présentations 3D. Tout comme $+_{=3}$, elle établit des liaisons entre triskels de gyries opposées. La condition sur les gyries de $\mathbf{t3d}_{p,Gg(Gd)}$ et $\mathbf{t3d}_{q,Gg'(Gd')}$ est donc :

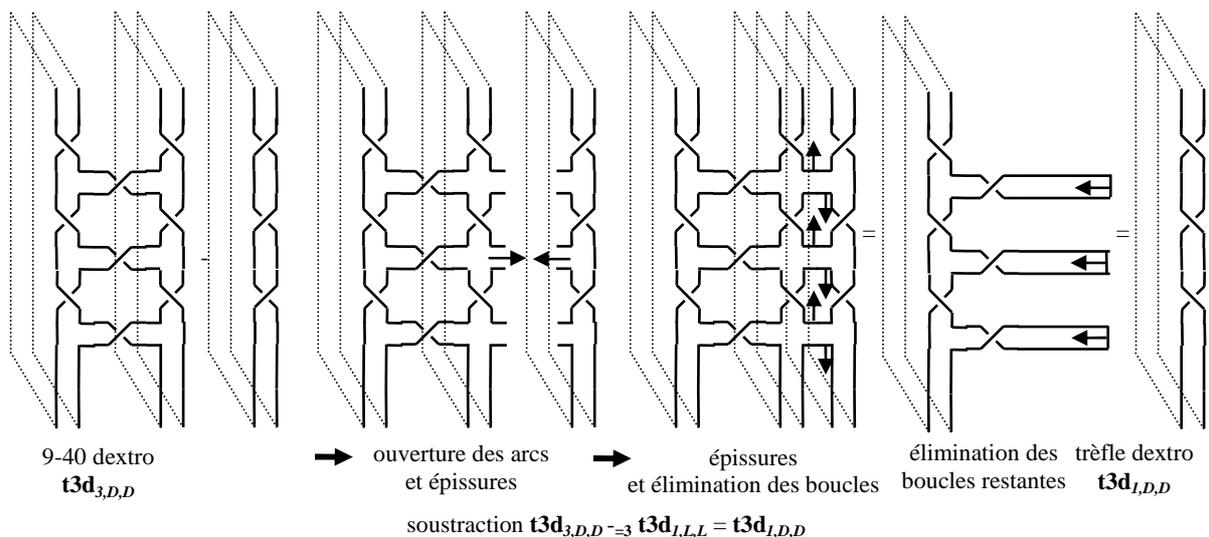
$$Gd \neq Gg', \text{ soit encore : } Gd = 1 - Gg'$$

L'exemple ci-après en montre le principe :

- (1) les deux présentations 3D de nœuds ou chaînes de la famille $\mathbf{t3d}_{I,D,D}$ sont positionnées côte à côté, cette fois-ci sans décalage : les arcs externes de l'une font face aux arcs externes de l'autre,
- (2) puis leurs arcs externes sont ouverts,
- (3) et un raboutage des brins se faisant face est effectué, réalisant ainsi le nouveau nœud qui est finalement mis au format de présentation 3D.

Donc l'exemple suivant est la soustraction d'un trèfle lévo à un 9-40 dextro. Le résultat est un trèfle dextro.

$$\mathbf{t3d}_{3,D,D} -_{=3} \mathbf{t3d}_{1,L,L} = \mathbf{t3d}_{1,D,D}$$



3.4.1 Tables pour la composition soustractive $-_{=3}$

Ci-après sont présentées deux tables de composition :

$$\mathbf{t3d}_{p,Gg(Gd)} -_{=3} \mathbf{t3d}_{q,Gg'=1-Gd(Gd')}$$

(a) composition $-_{=3}$ de présentations, cas $Gd = L, Gg' = D$

$-_{=3}$	$0,,-$	$1,D,D$	$2,D,L$	$3,D,D$	$4,D,L$	$5,D,D$...
$0,,-$	$3 * 0,,-$	$0,,-$	$1,L,L$	$2,L,D$	$3,L,L$	$4,L,D$...
$1,L,L$	$0,,-$	$3 * 0,,-$	$0,,-$	$1,D,D$	$2,D,L$	$3,D,D$...
$2,D,L$	$1,D,D$	$0,,-$	$3 * 0,,-$	$0,,-$	$1,L,L$	$2,L,D$...
$3,L,L$	$2,L,D$	$1,L,L$	$0,,-$	$3 * 0,,-$	$0,,-$	$1,D,D$...
$4,D,L$	$3,D,D$	$2,D,L$	$1,D,D$	$0,,-$	$3 * 0,,-$	$0,,-$...
$5,L,L$	$4,L,D$	$3,L,L$	$2,L,D$	$1,L,L$	$0,,-$	$3 * 0,,-$...
...

(b) composition $-_{=3}$ de nœuds et chaînes (moyennant le choix de gyries de présentations adéquats, respectant notamment la condition de composition)

$-_{=3}$	0	$1,D$	2	$3,D$	4	$5,D$...
0	$3 * 0$	0	$1,D$	2	$3,D$	4	...
$1,L$	0	$3 * 0$	0	$1,D$	2	$3,D$...
2	$1,L$	0	$3 * 0$	0	$1,D$	2	...
$3,L$	2	$1,L$	0	$3 * 0$	0	$1,D$...
4	$3,L$	2	$1,L$	0	$3 * 0$	0	...
$5,L$	4	$3,L$	2	$1,L$	0	$3 * 0$...
...

Les cellules grisées du tableau ci-dessus correspondent au **mouvement nœud N3**, déjà connu de certains psychanalystes utilisant la topologie, et dont on trouve une définition dans l'ouvrage de Jean-Michel Vappereau : *Nœud*, page 272.

Selon cette définition le mouvement nœud N3 est le cas particulier de la composition soustractive $-_{=3}$, cas où l'un des composés est la chaîne borroméenne.

3.4.2 trivialisations et changement de gyrie par composition soustractive, nœuds et chaînes inverses

Dans les tables précédentes de composition soustractive $-_{=3}$ on peut constater que pour tout(e) présentation de) nœud ou chaîne de la famille $t3d_n$ il existe deux éléments de la famille avec lesquels la composition conduit à une trivialisations simple, produisant un simple rond, et il existe un élément de la famille avec lequel la composition donne une trivialisations triple : trois ronds dé-chaînés.

Ainsi par exemple pour le borroméen :

$$t3d_{2,D,L} -_{=3} t3d_{1,D} = t3d_{2,D,L} -_{=3} t3d_{3,D} = 1 \text{ rond}$$

$$t3d_{2,D,L} -_{=3} t3d_{1,D} = 3 \text{ ronds}$$

ou encore pour le 9-40 :

$$t3d_{3,L,L} -_{=3} t3d_{2,D,L} = t3d_{3,L,L} -_{=3} t3d_{4,D,L} = 1 \text{ rond}$$

$$t3d_{3,L,L} -_{=3} t3d_{3,D,D} = 3 \text{ ronds}$$

Le rond étant élément neutre de la composition additive $+_{=3}$, on peut considérer ces éléments qui, par composition avec un $t3d_n$, produisent un ou trois rond(s) comme des (présentations de) nœuds ou chaînes inverses.

Un $t3d_{p,Gg,Gd}$ entrant dans une composition soustractive avec un $t3d_{q,Gg',Gd'}$ de gyrie opposée, va donc produire, selon les valeurs respectives des rangs p et q :

- si $q \leq p-2$: un résultat $\mathbf{t3d}_{r=p-q-1, Gg}$ de rang $r = p - q - 1$ et de même gyrie gauche Gg que $\mathbf{t3d}_p$
- si $q = p-1$ ou $q \geq p+1$: un rond
- si $q = p$: trois ronds
- si $q \geq p+2$: un résultat $\mathbf{t3d}_{r=q-p-1, Gg'', Gd'}$ de rang $r = q - p - 1$ et de même gyrie droite Gd' que $\mathbf{t3d}_{q, Gg', Gd'}$.

En résumé, la composition soustractive $-_{=3}$ est la composition qui permet la trivialisaton et le changement de gyrie des éléments de la famille **triskels_n**.

Cette propriété s'étend à la composition par $-_{=3}$ des membres de la famille **triskels_n** avec d'autres nœuds ou chaînes, par exemple avec les chaînes de Whitehead, chirales.¹⁴

3.5 Miscellanées

Ci-après quelques autres pistes d'étude envisageables.

3.5.1 Propriétés algébriques de $+_{=3}$ et $-_{=3}$

D'autres propriétés algébriques de $+_{=3}$ et $-_{=3}$ seraient à explorer.

3.5.2 Généralisations des opérations $+_{=3}$ et $-_{=3}$

Tout comme pour la composition $\#_{=3}$ il y aurait à considérer diverses paramétrisations des opérations $+$ et $-$.

En tout premier lieu il y aurait à étudier l'effet du paramètre b , nombre de bandes bilatères entrant dans l'opération de composition $+_{=b}$ et $-_{=b}$.

Il y aurait encore à étudier l'application des opérations $+_{=3}$ et $-_{=3}$ à des nœuds et chaînes faisant partie d'extensions de la famille **triskels_n**, comme par exemple les chaînes de Whitehead (mentionnées dans le paragraphe précédent) et 8-2-7, toutes deux chirales.

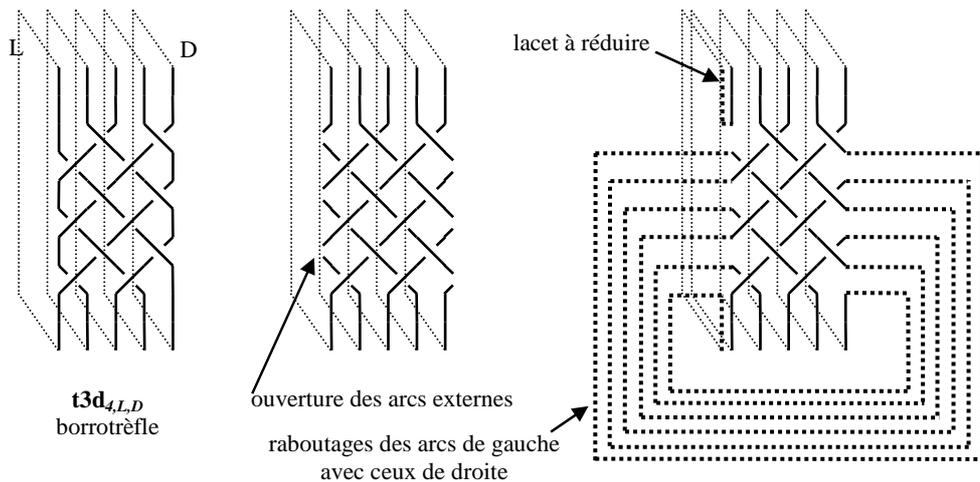
4 Un rebouclage torique des composés $\mathbf{t3d}_{2n, Gg, Gd=1-Gg}$

Je présente maintenant une opération de "rebouclage torique" pouvant s'effectuer sur les composés **t3d** de rang pair. Cette opération unaire ressemble, par son procédé, à l'opération binaire $+_{=3}$, cependant ici les arcs ouverts et raboutés ne sont pas les arcs externes à droite d'une première présentation 3d de nœud ou chaîne avec les arcs externes à gauche du second nœud, mais les arcs externes à droite et à gauche du même nœud.

4.1 Un exemple : le rebouclage torique du borrotrèfle

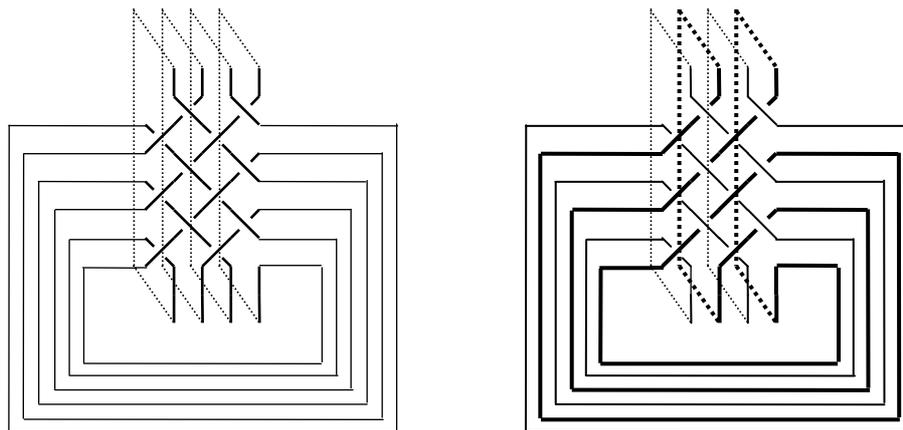
Voici pour illustrer cette opération un exemple s'appuyant sur la présentation 3d du borrotrèfle à 12 croisements qui peut être vu comme le composé $\#_{=3}$ d'un borroméen avec un trèfle, ou encore comme composé $+_{=3}$ de deux borroméens.

¹⁴ C'est une propriété de structure similaire qui, selon moi, opère dans le *Witz*, et a pour effet une transformation psychique que je considère semblable à un changement de gyrie.



La figure suivante montre deux vues de la présentation 3d résultante, après la réduction du lacet ou méandre inutile.

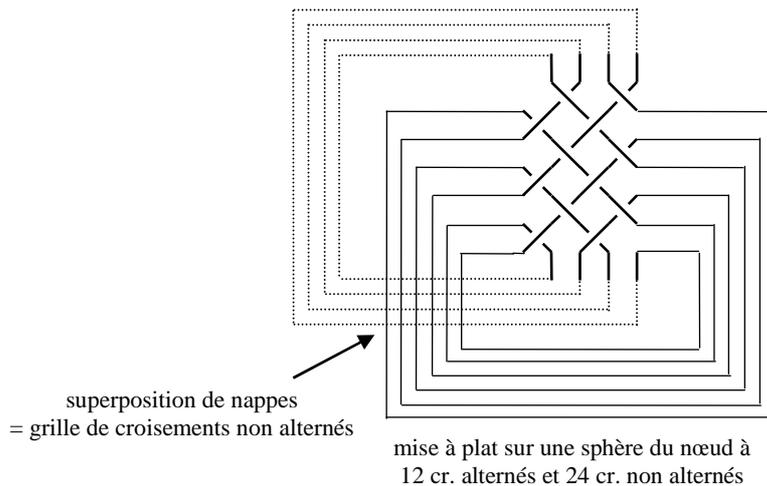
La chaîne résultante est à deux brins, différenciés par l'épaisseur des traits dans la vue de droite. Cette chaîne conserve le treillis de 12 croisements alternés du nœud à 12 croisements de départ. On observe deux nappes permettant la continuité entre le haut et le bas de la présentation d'une part, la gauche et la droite d'autre part.



4.2 Surface de mise à plat torique et croisements virtuels

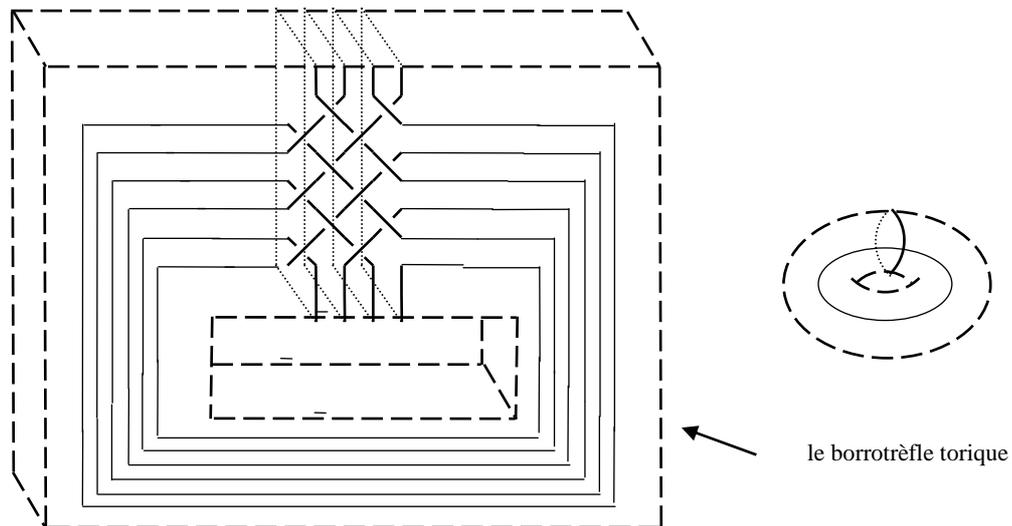
Le résultat de cette opération rebouclante est une présentation de nœud ou chaîne analysable par la théorie classique des nœuds ou chaînes.

Cependant l'on y constate une particularité de structure : les croisements de la chaîne sont organisés en deux réseaux très différents de nature : un premier treillis de 12 croisements alternés qui contient l'information initiale présente dans le **triskels3d** initial, et un second réseau de 24 croisements non alternés qui correspond à un croisement de nappes et ne contient pas d'information particulière, locale, mais simplement une information globale de la structure supportant la mise à plat : une nappe passe au dessus ou au dessous ou entre les brins d'une autre nappe, indifféremment.



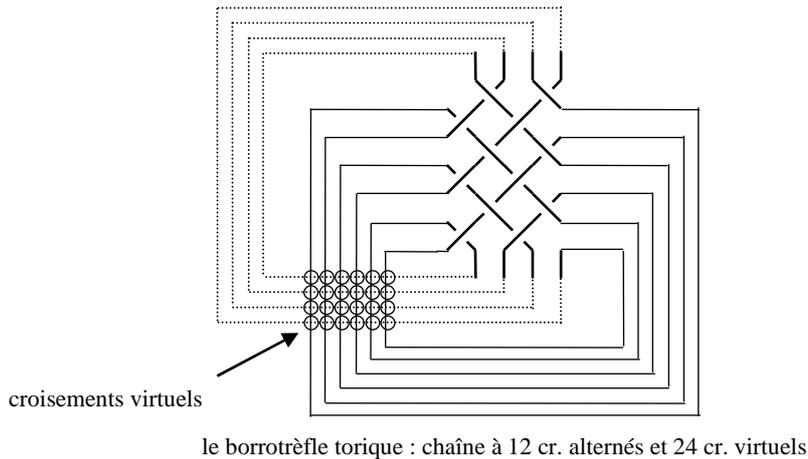
En fait la surface naturelle sur laquelle ces nappes peuvent être mises à plat n'est plus une **sphère**, comme l'impose la théorie classique des nœuds, mais un **tore**.

Pour cette raison je qualifie les nœuds et chaînes ainsi construits de "toriques", et la figure suivante montre une vue de notre exemple, le borrotrèfle rebouclé toriquement, que j'appelle **borrotrèfle torique**.



Les **croisements** non alternés de ces nappes sont alors à lire comme des croisements **virtuels**, et ce type de nœud ou chaîne sera plutôt à étudier à l'avenir avec la *Virtual Knot Theory*, la théorie des nœuds et chaînes virtuels de Kauffman¹⁵, qui est justement conçue pour l'étude de mise à plats de nœuds sur des surfaces non obligatoirement sphériques.

¹⁵ cf. Louis H. Kauffman, "Virtual Knot Theory", *Europ. J. Combinatorics* (1999) **20**, 663–691, et aussi Vassily Manturov, "Knot Theory", CRC Press, 2004.



4.3 L'opérateur de rebouclage torique

L'opérateur de rebouclage torique illustré avec la construction du borrotrèfle torique peut en fait opérer sur tous les membres $\mathbf{t3d}_{2p,(G_l,G_d=1-G_l)}$ de rang pair de la famille **triskels3d**. J'appelle **torus** cet opérateur et **t-tor** $_{2p,(G_l,G_d=1-G_l)}$ son résultat.

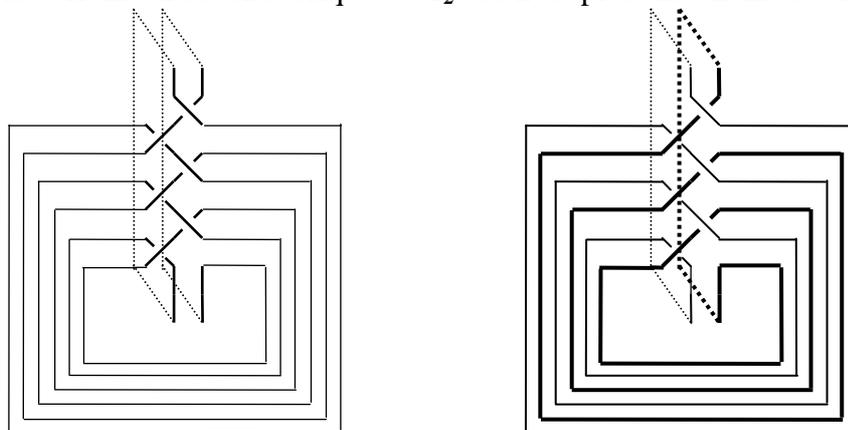
On écrira ainsi, lorsque l'opérateur porte sur des présentations 3d :

$$\mathbf{torus}(\mathbf{t3d}_{2p,(G_l,G_d=1-G_l)}) = \mathbf{t-tor}_{2p,(G_l,G_d=1-G_l)}$$

ou plus simplement, lorsque l'opérateur porte sur des nœuds et chaînes, en n'alourdissant plus notre notation des gyries de présentation :

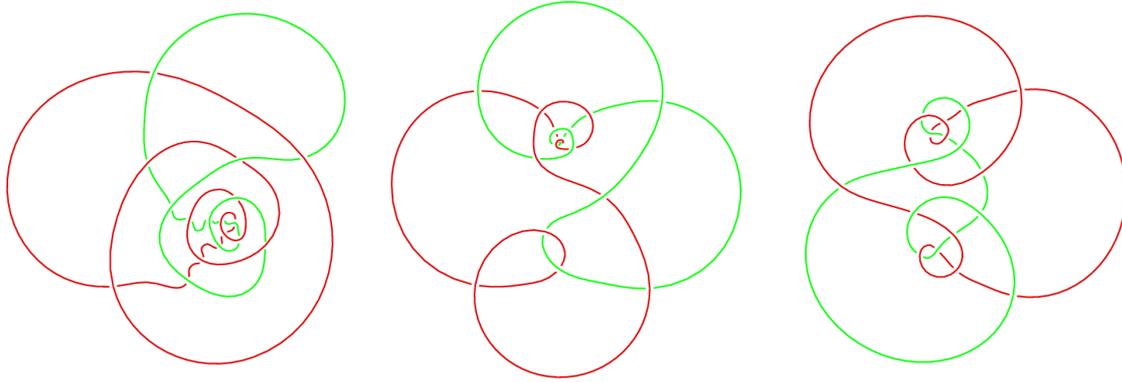
$$\mathbf{torus}(\mathbf{t}_{2p}) = \mathbf{t-tor}_{2p}$$

La figure suivante montre le résultat de l'opération **torus** sur un nœud borroméen \mathbf{t}_2 . Le résultat est le borroméen devenu torique **t-tor** $_2$. Ce n'est plus une chaîne à 3 mais à 2 brins.



Voici d'autres présentations¹⁶ de cette chaîne **t-tor** $_2$.

¹⁶ source : <http://knotilus.math.uwo.ca/draw.php?knot=1,11,17,-2,3,9,15,-4,5,7,13,-6,-7,-8,-9,-10,-11,-12:6,-5,8,14,4,-3,10,16,2,-1,12,-17,-16,-15,-14,-13>



5 Un codage littéral de la famille $\text{triskels}_{n,Gi,Ge}$

Une représentation littérale des membres de la famille $\text{triskels}_{n,Gi,Ge}$ permettra de disposer d'écritures plus maniables et économes.

Soit l'alphabet $A = \{ L, D \}$, la lettre L correspond à un triskel lévo et la lettre D à un triskel dextro. La composition $+_{=3}$ correspond à la concaténation de mots constitués de séquences alternées des lettres L et D.

Ainsi, sur une lettre de base L, on peut construire les mots :

L, LD, LDL, LDLD, ... correspondant à $\mathbf{t}_{1,L,L}, \mathbf{t}_{2,L,D}, \mathbf{t}_{3,L,L}, \mathbf{t}_{4,L,D}, \dots$

tandis que sur une lettre de base D, on peut construire les mots :

D, DL, DLD, DLDL, ... correspondant à $\mathbf{t}_{1,D,D}, \mathbf{t}_{2,D,L}, \mathbf{t}_{3,D,D}, \mathbf{t}_{4,D,L}, \dots$

Afin de transcrire les nouages toriques, nous allons marquer en gras¹⁷ **L** et **D** les deux triskels de base des deux sous-familles qui deviennent :

L, **LD**, **LDL**, **LDLD**, ... correspondant à $\mathbf{t}_{1,L,L}, \mathbf{t}_{2,L,D}, \mathbf{t}_{3,L,L}, \mathbf{t}_{4,L,D}, \dots$

et :

D, **DL**, **DLD**, **DLDL**, ... correspondant à $\mathbf{t}_{1,D,D}, \mathbf{t}_{2,D,L}, \mathbf{t}_{3,D,D}, \mathbf{t}_{4,D,L}, \dots$

La chaîne borroméenne peut-être aussi vue comme une base de construction à laquelle on fait correspondre la base $\mathbf{LD} \approx \mathbf{DL}$ qui peut se prêter à des extensions à droite ou à gauche indifféremment, donnant les séquences, pour les extensions à droite :

LD, **LDL**, **LDLD**, **LDLDL**, ... correspondant à $\mathbf{t}_{2,L,D}, \mathbf{t}_{3,L,L}, \mathbf{t}_{4,L,D}, \mathbf{t}_{5,L,L}, \dots$

DL, **DLD**, **DLDL**, **DLDLD**, ... correspondant à $\mathbf{t}_{2,D,L}, \mathbf{t}_{3,D,D}, \mathbf{t}_{4,D,L}, \mathbf{t}_{5,D,D}, \dots$

et pour les extensions à gauche :

DLD, **LDLD**, **DLDLD**, **LDLDDL**, ...

LDL, **DLDL**, **LDLDL**, **DLDDL**, ...

Et, si l'on s'autorise une extension à gauche sur une extension à droite, et/ou une extension à droite sur une extension à gauche, on construit toutes les séquences de mots alternant les lettres L et D et contenant un et un seul doublet **LD** ou **DL**, comme par exemple :

DL, **LDLDDL**, **LDLDDL**, ...

¹⁷ L'intérêt de distinguer certaines lettres dans un mot, et donc certains triskels dans un composé de triskels, est que, dans le schématisme RL, le(s) triskel(s) de récursivité ne joue(nt) pas le même rôle que le(s) triskel(s) liant les extensions.

Sur cette famille de mots on peut introduire une opération **clivage faible**, notée |, et une autre opération **clivage fort**, notée ||.

Le clivage faible clive les mots sans toucher au noyau de base **LD** (\approx **DL**). Ainsi, à partir du mot **LDL \mathbf{D} LD** l'on peut produire des mots clivés faiblement :

$$L | \mathbf{DLDL}, LD | \mathbf{LDL}, LDL | \mathbf{DL}, \mathbf{LDL} | D$$

Un mot peut être multiplement clivé faiblement. Exemple :

$$L | D | \mathbf{LDL} | D$$

Le clivage fort clive les mots au niveau du noyau de base **LD** qui devient **L || D**, ou **DL** qui devient **D || L**. Ainsi, à partir du mot **LDL \mathbf{D} LD** l'on peut produire des mots clivés fortement :

$$\mathbf{LDL} || \mathbf{LD}$$

Clivages faible et fort peuvent être combinés comme par exemple, à partir de **LDL \mathbf{D} LD** :

$$L | \mathbf{DL} || \mathbf{LD}.$$

On peut considérer les opérations clivages faible | et fort || comme des opérations rompant la connexité du mot initial et créant des sous-mots non liés.

Pour les mots de longueur paire (constitués de $2p$ lettres) disposant d'une base **LD** \approx **DL** on peut appliquer une opération **cerce** **o** qui correspond à l'opération **torus** sur la famille **triskels** _{$2p, Gi, Ge=-Gi$} . Indiquons cette opération par la lettre **o** située en fin de mot.

Pour le mot **LDLD** on a :

$$\mathbf{DLDL}o \approx \mathbf{LDL}Do \approx \mathbf{DL}Lo \approx \mathbf{LDL}Do$$

Pour convention on utilisera **DLDL \mathbf{o}** représentant de cette classe de mots équivalents moyennant l'opération de permutation circulaire des lettres.

Les clivages forts et faibles sont définis comme précédemment. Cependant le clivage fort || annule la circularité **o** :

$$||(\mathbf{DLDL}o) = \mathbf{DLDL}$$

La chaîne résultante reste connexe, mais dès lors, un clivage faible sur un mot non circulaire introduit une perte de connexité, séparant le mot initial en deux sous-mots contenant l'un **D** l'autre **L**.

$$\mathbf{DL} | \mathbf{DL} \rightarrow \mathbf{DL} \text{ et } \mathbf{DL}$$

Diverses opérations sur ces mots sont alors concevables :

- transformation d'un **D** en **D** ou **L** en **L**, et l'inverse ;
- suppression d'une lettre entraînant un clivage (faible ou fort) à son bord ;
- insertion d'une lettre en bord de clivage ;
- substitution d'un groupe de lettres, en respectant les contraintes sur les bords ;
- distinction d'un second couple de lettres **L** et **D** pour constituer des mots du type :
 $\mathbf{LDL}DL\mathbf{DL}, \mathbf{LDL}DL\mathbf{o}, \mathbf{LDL}Do, \dots$
- ...

Conclusion

Cette étude, commencée début juillet, appellerait naturellement à de nouvelles extensions.

Cette étude est naïve, pas ou peu instruite des innombrables travaux en théorie des nœuds ni même des ouvrages de référence du domaine, et pourra, dans des versions à venir, si l'auteur en est informé, faire référence aux éventuels travaux ou textes qui pourraient servir de référence à ce qui a été ici exposé.

Il y est fait référence à la théorie des nœuds virtuels, mais celle-ci, trop peu connue par l'auteur, n'est pas directement sollicitée ici.

J'entreprends par ailleurs¹⁸ la mobilisation par la psychanalyse des objets et opérateurs définis ici sous une forme encore sujette à évolutions.

* * *

¹⁸ Marc Saint-Paul, "Topologie et schématisation RL pour la psychanalyse", été 2015.